SUR
LA PHILOSOPHIE
DES MATHÉMATIQUES

PAR

JULES RICHARD

Docteur ès-sciences Mathématiques
Professeur de Mathématiques au Lycée de Dijon

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins.

1903

INTRODUCTION

La philosophie des sciences, même en se bornant à celles de pur raisonnement, renferme un très grand nombre de questions de natures diverses. On peut se placer à des points de vue très différents.

Dans ce travail, j'examine d'abord les règles de la logique... Je montre comment, par la déduction, on peut faire sortir d'un petit nombre de principes, une infinité de propositions nouvelles.

Dans une seconde partie, vient l'étude des principes de la géométrie, et en particulier du postulatum d'Euclide.

La 3e partie contient diverses questions sur l'infini, le continu, l'univers, la matière.

J'examine ensuite certains points relatifs à différentes sciences. Si parmi ces sciences, l'analyse n'occupe pas une place en rapport avec son importance, cela tient à la difficulté de faire comprendre à ceux qui n'ont pas étudié cette science, les résultats auxquels elle parvient.

Un chapitre étendu est consacré à passer en revue les principales applications des mathémati-

ques, un autre plus court au rôle de la science dans l'enseignement.

Je termine par une note de mathématiques sur la géométrie projective.

Il ne faudrait pas considérer ce livre comme une sorte de petit traité d'ensemble présentant une unité et cherchant à faire prévaloir certaines idées. Chaque chapitre est en général peu lié aux autres et forme presque toujours un tout à peu près complet.

J'ai évité autant que j'ai pu, de faire usage de théories connues seulement de ceux qui s'occupent spécialement des mathématiques. J'ai quelquefois rappelé des définitions que presque tous mes lecteurs devront connaître.

PREMIÈRE PARTIE

LA LOGIQUE

CHAPITRE PREMIER

LES RÈGLES DU RAISONNEMENT

Les logiciens définissent, d'une façon plus ou moins satisfaisante, le sens des mots : idée, terme, jugement, proposition, raisonnement, etc.

Or, il est impossible de tout définir, car pour définir un mot on emploie d'autre mots, et ceux-ci à leur tour devraient être définis. Il y a cependant un moyen de sortir d'embarras : on expliquera le sens d'un mot en montrant l'objet désigné par ce mot.

Appliquons cette méthode, pour indiquer ce qu'on entend par jugement, proposition. Si, voyant un cheval, je pense : ce cheval est noir, cette pensée constitue un *jugement*. Ce qui caractérise un jugement, ce qui le distingue d'une autre espèce de pensée, c'est qu'il est forcément *vrai* ou *faux*. *Une proposition* n'est autre qu'un *jugement exprimé* soit par la parole, soit par l'écriture, soit de toute autre ma-

nière. Quand je dis, quand j'écris : ce cheval est noir, je formule une proposition.

Il faut distinguer différentes espèces de propositions. Je les nommerai faits *absolus*, faits *relatifs* et *propositions générales*, ou *lois*.

« Henri IV fut assassiné » est un *fait absolu* ; cette proposition est vraie ou fausse : il n'y a pas plusieurs cas possibles.

« Ce cheval est noir » est un *fait relatif* ; il peut être vrai dans certains cas, faux dans d'autres ; l'observation permettra, dans chaque cas particulier, de s'assurer si le fait est vrai ou faux.

« Ce triangle a deux côtés égaux » est un fait du même genre. Si le triangle en question est tracé sur une feuille de papier, une petite expérience faite par exemple avec un compas, permettra de contrôler ce fait.

« Si un triangle a deux côtés égaux. il a deux angles égaux » est une proposition générale ou loi. Une telle proposition exprime, on le voit, une sorte de liaison entre deux faits. Si un premier fait A est vrai, un second fait B est vrai. Le fait A se nomme antécédent, ou *hypothèse*, B se nomme conséquent ou *thèse*. Au lieu de dire si le fait A est vrai, le fait B est vrai, on peut dire : Le fait A *entraîne* le fait B, ou, le fait A *implique* le fait B. Nous nous servirons

du verbe *impliquer*, qui est fort commode. Nous dirons A *implique* B : Cela a le même sens que : Si A est vrai, B est vrai, et a l'avantage d'être plus court.

Supposons que le fait A soit vrai, et que A implique B : alors B sera vrai aussi : Je dirai A est vrai, donc B est vrai. C'est là un raisonnement, le plus simple qu'on puisse faire. Avec le logicien anglais *Peirce*, je nommerai cette espèce de raisonnement une *inférence*.

Pour que l'inférence soit légitime, il faut : 1° que le fait A soit vrai ; 2° que la proposition générale « A implique B » soit vraie : alors on pourra affirmer le fait B.

Par exemple la géométrie m'apprend que si un triangle a deux côtés égaux, il a deux angles égaux. J'ai sur le papier un triangle, et je m'assure, à l'aide d'un compas, qu'il a deux côtés égaux. Je puis dès lors affirmer, sans mesurer les angles, que ce triangle a deux angles égaux. C'est là une inférence.

Il y a une espèce de proposition générale d'une nature différente, et consistant à affirmer qu'il y a des cas où un fait est vrai ; Exemple : Il est possible de construire un triangle ayant un angle droit. Nous nommerons de pareilles propositions des *possibilités*. Au sujet de pareilles propositions, on peut faire une remarque qui est importante.

La proposition que je viens d'énoncer pourrait encore se mettre sous la forme suivante : « Le fait qu'une figure est un triangle, n'implique pas qu'elle n'ait aucun angle droit », d'où il résulte qu'une possibilité peut s'énoncer sous la forme « A n'implique pas B ».

Considérons deux faits A et B ; on peut considérer les combinaisons suivantes :

1° A est vrai, B est vrai.

2° A est vrai, B est faux.

3° A est faux, B est vrai.

4° A est faux. B est faux.

Dire que A implique B, c'est dire que le second de ces cas ne peut avoir lieu. Dire que A n'implique pas B, c'est-dire que ce second cas peut avoir lieu.

Le petit tableau précédent peut être utile pour retourner les propositions. Supposons que A implique B, alors la fausseté de B impliquera celle de A ; c'est-à-dire que si B est faux, A est faux ; en effet, le cas n° 2 du tableau ci-dessus étant impossible, il ne peut arriver que B soit faux et A vrai.

Au lieu de dire : Si B est faux, A est faux, je dirai : *Non B* implique *non A*. (*Non A* désigne la négation de A.)

Nous appelons proposition directe, celle qui nous sert de point de départ, à savoir « A implique B »,

Elle consiste, nous l'avons dit, à nier la possibilité du cas n° 2.

« B implique A » est la réciproque ; elle consiste à nier la possibilité du cas n° 3 ; elle peut aussi s'énoncer : « Non A implique non B ».

La contraire est : « A implique non B » ou « B implique non A », elle consiste à nier la possibilité du cas n° 1.

Il ne faut pas confondre la *contraire* avec la *contradictoire*. La contradictoire de « A implique B » c'est : « A n'implique pas B ». Elle consiste à affirmer la possibilité du cas n° 2.

Ces définitions n'importent pas beaucoup, pour l'étude de ce qui suit. Montrons maintenant, par un exemple simple, emprunté aux premières propositions de la géométrie dans l'espace, ce que c'est qu'une démonstration.

Je vais *démontrer* la proposition suivante :

Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. J'admets les propositions suivantes, qui dans les cours de géométrie, sont démontrées antérieurement à celle que je considère,

I. — On peut toujours mener des plans perpendiculaires à une droite.

II. — Si deux droites sont parallèles, tout plan

perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.

III. — Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, elles sont parallèles.

La proposition que je veux démontrer se compose d'une hypothèse « Si deux droites sont parallèles à une 3me » et d'une thèse : « Elles sont parallèles entre elles ». J'imagine un cas où l'hypothèse est vraie : Je considère trois droites D, D′, D″, telles que les deux dernières soient parallèles à la 1re, et je vais faire voir qu'elles sont parallèles entre elles.

J'écris mes hypothèses.

(*a*) D est une droite.	(*d*) D et D′ sont parallèles.
(*b*) D′ est une droite.	(*e*) D et D″ sont parallèles.
(*c*) D″ est une droite.	

Je puis toujours considérer un plan P perpendiculaire à D, d'après la proposition générale I ci-dessus. Ceci permet d'adjoindre aux hypothèses la proposition (*f*) *P est un plan perpendiculaire à D*. Quand on adjoint ainsi une hypothèse nouvelle à celles déjà faites, elle se nomme hypothèse *construction*.

Maintenant, la proposition générale n° II me permet de faire l'inférence suivante :

: D est une droite, D′ est une droite, D et D′ sont

parallèles, P est perpendiculaire à D, donc P est perpendiculaire à D′.

J'ai ainsi ce nouveau fait :

(*g*) P est perpendiculaire à D′

La même proposition générale II permet de faire l'inférence suivante :

D est une droite, D″ est une droite, D et D″ sont parallèles, P est perpendiculaire à D, *donc* P est perpendiculaire à D″.

D'où ce nouveau fait :

(*h*) P est perpendiculaire à D″

La proposition générale nº III permet maintenant l'inférence suivante :

D′ est une droite, D″ est une droite ; le plan P est perpendiculaire à D′, il l'est aussi à D″, *donc* D′ et D″ sont parallèles.

J'aboutis ainsi à la proposition :

(*k*) D′ et D″ sont parallèles.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ayant désigné tous les faits par des lettres, nous pouvons résumer ainsi la démonstration.

Hypothèses *abcde*.

Construction *f* [Faite en vertu de la proposition générale I].

1° Inférence *abdf* donc *g* [En vertu de la proposition générale II].

2° Inférence *acef* donc *h* [En vertu de II].

3° — *bcgh* donc *k* [En vertu de III].

De l'exemple précédent résultent les remarques suivantes, qui constituent en quelque sorte, la véritable théorie de la démonstration.

Pour démontrer une proposition : A *implique* B, on s'imagine placé dans un cas où le fait A est vrai.

L'hypothèse A peut être décomposée en plusieurs hypothèses partielles *abcde*.

Une ou plusieurs proposition générales exprimant des possibilités, permettent d'adjoindre à ces hypothèses, d'autres faits, tels que *f*, nommés *hypothèses constructions*.

On fait ensuite une série d'inférences, en n'admettant jamais une proposition, que si elle est dans les hypothèses primitives, ou dans les conclusions des inférences antérieurement faites. De plus, chaque inférence doit être *justifiée* par une proposition générale. Enfin, la conclusion de la dernière inférence est la thèse à démontrer.

Je vais insister sur ce point important, et qui semble au premier abord paradoxal. La démonstration est une sorte de mécanisme, ne supposant pas la connaissance des objets dont on parle. Dans la dé-

monstration précédente on a des objets qu'on appelle des *droites*, d'autres qu'on appelle des *plans*. Peu importe au fond la nature de ces objets. Entre deux droites il peut y avoir une certaine relation qu'on exprime en disant qu'elles sont *parallèles*. Entre une droite et un plan on peut avoir une certaine relation, que l'on exprime en disant que la droite est *perpendiculaire* au plan. La nature de ces relations importe peu. Ce qui importe, c'est que ces relations soient telles que les axiomes I, II, III soient vrais.

Cela étant, la démonstration précédente est parfaitement valable. Il peut arriver, qu'en changeant le sens des mots, les principes restent vrais. Alors les démonstrations fondées sur ces principes restent vraies aussi, et les conséquences restent vraies avec le nouveau sens des mots.

Pour donner un exemple, la géométrie dite projective reste vraie quand on change le mot *point* dans le mot *plan* et inversement ; à la place des mots « *droite joignant deux points* », on doit mettre « *droite d'intersection de deux plans* » et inversement. A la place de « *plan passant par trois points* » on doit mettre « *point de rencontre de trois plans* » et inversement. Chaque proposition en donne ainsi une autre qui en est en quelque sorte la traduction. C'est ce qu'on nomme le *principe de Dualité*.

Imaginez deux personnes dont l'une nomme *point* ce que l'autre appelle *plan*, (*et vice versa*), et supposez que ces deux personnes étudient ensemble la géométrie projective. Elles croiront se comprendre parfaitement, tandis qu'en réalité, quand l'une énoncera une proposition, l'autre entendra la proposition qui lui correspond par le principe de Dualité, et qui en est, comme il vient d'être expliqué, la traduction. Cette proposition est souvent appelée *corrélative* de la première. Après cet exemple, revenons aux règles générales de la démonstration.

Il faut distinguer une démonstration d'une simple inférence. Une confusion de langage très souvent commise, rend obcurs la plupart des traités de logique. On démontre une proposition générale en se servant d'autres propositions générales. Nous avons démontré la proposition « Si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles ». en nous servant des propositions générales (I) (II) (III). Nous pouvons dire que des propositions I, II, III, nous avons *déduit* notre proposition. *Déduire* c'est passer de propositions *générales*, à une autre proposition *générale* : *Inférer* c'est passer d'un *fait* à un *fait*, en vertu d'une proposition générale.

Dans le langage courant, et dans la plupart des traités on emploie le mot déduire dans le sens que

nous lui donnons ici, et quelquefois aussi dans le sens d'inférer. La confusion produite amène cette conséquence assez singulière. On arrive à tenir le même langage que si la déduction permettait de passer non de la loi à la loi, ni du fait au fait, mais de la loi au fait, et on lui oppose une autre espèce de raisonnement, ou plutôt une autre manière de découvrir la vérité, en usage dans les sciences physiques. nommée *induction*, et permettant de passer du fait à la loi.

Une autre confusion est produite par le sens très flou que l'on attache aux mots propositions générales, propositions particulières. Prenons ces deux propositions, « tout homme est mortel, » « quelques hommes sont blonds ». La première, selon la logique d'Aristote, est générale, ou plutôt *universelle*, la seconde est *particulière*. Pour nous, la première est générale, la seconde également, mais cette dernière est une possibilité. La première peut s'énoncer ainsi : « Si quelque être est homme, il est mortel », la seconde : « quelque être est un homme *on ne peut pas affirmer* qu'il n'est pas blond » ou encore, « Un tel est un homme *implique* un tel est mortel » « Un tel est un homme *n'implique pas* un tel n'est pas blond ».

D'autres fois on prend les mots « général, particu-

lier » dans un sens relatif, quand on dit qu'une proposition est plus ou moins générale qu'une autre. Ainsi : « Tout homme est mortel » est une proposition moins générale que celle-ci : « Tout animal est mortel. » Soit une catégorie A d'objets, et une seconde catégorie B, tel que tout objet de la catégorie A appartienne à la catégorie B, sans que la réciproque soit vraie. On dira que la classe A est contenue dans la classe B. Dès lors une propriété des objets A sera moins générale qu'une propriété des objets B. Ainsi la catégorie des hommes est comprise dans celle des animaux. Dans le raisonnement suivant, appelé syllogisme, et sur lequel nous reviendrons : « Tout animal est mortel, or l'homme est un animal, donc l'homme est mortel. » On passe d'une proposition « Tout animal est mortel, » à une autre moins générale « tout homme est mortel ». C'est dans ce sens que l'on peut dire : « On conclut du général au particulier », et comme la plupart des anciens logiciens ont pris comme type ce raisonnement ou quelqu'autre semblable, ils ont cru pouvoir affirmer que dans la déduction on passait toujours du général au particulier.

La fausseté de cette affirmation va ressortir des exemples suivants : 1° En partant de trois propositions générales I, II et III, nous avons démontré la

proposition « Deux droites parallèles à une 3e sont parallèles entre elles ». Les propositions I, II, III, concernent des droites et des plans, la proposition démontrée ne concerne que des droites. La démonstration a eu en quelque sorte pour effet *d'éliminer l'idée de plan* entre les propositions I, II, III. Peut on dire que ces dernières ont une généralité supérieure à celle de la proposition démontrée. Non certes : elles ne concernent pas les mêmes objets, il n'y pas de comparaison possible.

On ne peut pas dire que l'on passe du même au même. Il faudrait pouvoir mesurer le degré de généralité d'une proposition : or cela ne peut se faire quand les propositions ne concernent pas les mêmes objets.

L'exemple suivant fera ressortir d'une façon frappante la fausseté de l'affirmation que je conteste ici.

Admettons cette proposition « Dans tous triangle rectangle la somme des angles vaut deux droits » Je vais démontrer que la proposition est encore vraie pour un triangle quelconque.

Soit un triangle ABC : du sommet A abaissons AD, perpendiculaire sur BC. Il y aurait deux cas à distinguer selon que D tombe entre B et C, ou non. Je ne considérerai que le premier cas, le second cas se

traiterait aussi facilement. Le théorème énoncé est vrai pour les deux triangles ADB et ADC. c'est-à-dire que l'on a :

$$\text{angle B} + \text{angle BAD} + \text{angle ADB} = 2 \text{ droits.}$$

et $$\text{angle C} + \text{angle DAC} + \text{angle ADC} = 2$$

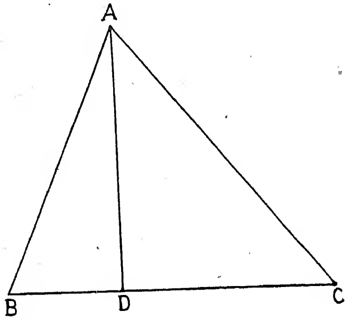

Fig. 1

en ajoutant et observant que ADB et ADC sont droits :
$$\text{angle B} + \text{angle BAD} + \text{angle DAC} + \text{angle C} + 2 = 4^d$$
mais la somme des angles BAD et DAC, c'est l'angle A du triangle :

donc $$B + A + C + 2 = 4$$

ou $$B + A + C = 2.$$

La proposition est démontrée. Pour abréger, je

n'ai pas détaillé les inférences ni indiqué les propositions qui les autorisaient, le lecteur y suppléera facilement, s'il le désire. Ce qu'il suffit de remarquer, c'est que l'on est passé d'une proposition concernant les seuls triangles rectangles à une autre plus générale concernant les triangles quelconques. On a *généralisé* tout en employant la déduction.

Propositions générales composées. Nous avons vu dans ce qui précède des propositions générales ayant leurs hypothèses formées de plusieurs faits, c'est à dire pouvant s'énoncer ainsi :

Si les faits ABCD sont vrais, le fait E est vrai, ou encore : les faits ABCD impliquent E.

Le fait complexe ABCD, composé des quatre faits simples A, B, C, D, ayant lieu simultanément, a été nommé par différents logiciens, le produit de ces faits. En voici la raison. En arithmétique, pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs le soit. Or, ici si l'on exprime par $A = o$ l'impossibilité du fait A, pour que le fait complexe ABCD ne puisse avoir lieu, il *suffira* que l'un des faits simples ABCD ne puisse avoir lieu, on aura donc la même propriété qu'en arithmétique.

Le produit logique s'exprime dans le langage ordinaire par la conjonction *et*.

Lorsque la thèse est un produit logique, on peut toujours décomposer la proposition en plusieurs autres.

Ainsi la proposition « ABCD impliquent E et F » est en réalité double « ABCD impliquent E, ABCD impliquent F. » La conjonction *et* dans la thèse, n'a d'autre raison d'être que l'abréviation, elle est au contraire essentielle dans l'hypothèse.

La conjonction *ou* joue un rôle analogue, mais un peu différent, nous allons montrer qu'elle n'est pas indispensable.

Envisageons d'abord la conjonction *ou* dans l'hypothèse : soit la proposition ; Si A ou B est vrai, C est vrai. Elle peut s'énoncer en deux fois. Si A est vrai C est vrai, si B est vrai C est vrai. La proposition énoncée est donc en réalité double, et la conjonction *ou* ne sert que pour abréger. Envisageons maintenant la conjonction *ou* dans la thèse. Soit la proposition : « Si A est vrai, B ou C est vrai ». Cette proposition peut s'énoncer ainsi : « Si A est vrai et si B est faux, C est vrai » ou encore : « Si A est vrai et si C est faux, B est vrai. On peut donc supprimer la conjonction *ou* dans la thèse, en ajoutant quelque chose dans l'hypothèse.

Quelques logiciens représentent la conjonction *ou* par le signe $+$; $A + B$ signifie A ou B, c'est une *somme logique*.

D'après ce qui précède la proposition

A implique B + C

peut s'écrire A et non B impliquent C
ou bien A et non C impliquent B

On pourrait énoncer cette règle sous la forme d'une règle d'algèbre mais c'est pour nous inutile.

Objets auxquels les propositions s'appliquent.

Quand on dit « A implique B », il faut entendre que si A est vrai de certains objets, B est vrai des mêmes objets. Exemple : « Si deux droites sont parallèles à une troisième, *ces* deux droites sont parallèles entre elles ». Dans l'hypothèse et dans la thèse, il est question des mêmes droites. Cela est indiqué ordinairement par un pronom démonstratif. « Ces deux droites », on peut aussi nommer chaque objet par un nom spécial « nom propre » ou par un numéro. Exemple : « Si deux droites D', D" sont parallèles à une droite D, D' et D" sont parallèles entre elles », ou encore, si une première et une seconde droite sont parallèles à une troisième, la première et la seconde sont parallèles entre elles.

Les propositions simples, que j'ai nommées faits, peuvent être de natures très diverses. Quelquefois, selon la manière dont on envisage les choses, un fait peut être considéré comme une loi, et la distinction

semble n'être pas absolue. Par exemple : Soit D une droite perpendiculaire à un plan P, c'est-à-dire à toutes les droites de ce plan, D *est une droite perpendiculaire au plan* P, est un fait. On peut aussi énoncer la proposition : si une droite D' est dans le plan P, cette droite est perpendiculaire à D. Cette confusion a lieu toutes les fois qu'un individu A est dans une certaine relation α avec tous les individus d'une classe K. alors on peut dire : A est dans la relation α avec tout individu de la classe K, c'est là un fait : ou bien : si l'individu x appartient à la classe K, A est dans la relation α avec x, c'est une proposition générale.

Il suffit de signaler cette confusion possible. Dans un raisonnement, cela ne peut conduire à aucune erreur, car on a le droit d'envisager la proposition des deux façons.

Cela nous conduit à parler des classes d'objets, telles qu'on les considère dans les sciences. Pour qu'une classe d'objets soit définie, il faut qu'il y ait un moyen de reconnaître si un objet déterminé appartient à la classe, et aussi que l'identité de deux objets soit bien définie. J'explique ce dernier point : On lit dans les traités de géométrie : « Il n'y a que cinq polyèdres réguliers convexes ». Il faut sous-entendre que deux polyèdres semblables sont considé-

rés comme identiques. Autre exemple : En arithmétique, on considère les nombres comme des individus ; vous pouvez avoir un tas de 13 pommes, une durée de 13 secondes, c'est toujours le *même* nombre 13, Cette proposition « 13 est un nombre premier » est considérée comme un fait, bien qu'on puisse la considérer aussi comme une proposition générale « si une collection comprend 13 objets, on ne peut en former plusieurs collections contenant toutes le même nombre d'objets ».

D'après cela, pour que une classe K soit définie, il faut que les deux propositions : « x est un objet de la classe K ». « Les individus x et y qui sont de la classe K, sont identiques » aient un sens, c'est-à-dire qu'il y ait un moyen de savoir si elles sont vraies ou fausses.

Une classe K est dite comprise dans une autre K', si la proposition : « l'objet x appartient à la classe K » implique : « L'objet x appartient à la classe K' ».

Il peut y avoir des classes de classes. Par exemple : Une droite peut être considérée comme une classe de points. Toutes les droites passant par un point donné forment une classe de droites : C'est donc là une classe de classes.

Une classe peut renfermer un nombre limité d'objets, ou un nombre illimité. Ainsi il n'y a que cinq

polyèdres réguliers convexes, tandis que la classe des nombres premiers est illimitée.

C'est ici le lieu de distinguer les deux sens du verbe *être*, indiqués par M. Peano, dans sa *logique mathématique*. Le verbre être peut signifier ou bien qu'un individu appartient à une classe, ou bien qu'une classe est comprise dans une autre. « Tout homme est mortel », ici le verbe *est* est pris dans le second sens. « La classe des hommes est contenue dans la classe des êtres mortels ». Ici la proposition est générale, elle peut s'énoncer : si quelque être est homme il est mortel ; c'est pourquoi je nommerai ce sens du verbe être : sens général. M. Peano le désigne par la lettre $\supset$.

L'autre sens sera le sens individuel. « Paul est un homme ». L'individu Paul est contenu dans la classe des hommes.

Ces deux sens sont bien distincts. Le sens général est *transitif*, et non le sens individuel. Je vais expliquer d'abord la signification du mot *transitif*. Une relation α est dite *transitive* si les deux faits $A\alpha B$, $B\alpha C$ impliquent $A\alpha C$. Exemple le signe $=$: si $A = B$ et si $B = C$ alors on peut conclure $A = C$. Le signe $>$ (plus grand que). Si A est plus grand que B et si B est plus grand que C, alors A est plus grand que C. Le signe du parallélisme : Si A est pa-

rallèle à B et si B est parallèle à C, alors A est parallèle à C.

Or, le verbe « *est* », pris dans le sens général, est transitif. Si la classe A est contenue dans la classe B, et si la classe B est contenue dans la classe C, alors la classe A est contenue dans C.

Dans le sens individuel, le verbe « *est* » n'est pas transitif. Voici l'exemple choisi par M. Peano pour le montrer. Considérons cette proposition : La classe des nombres premiers est illimitée. Ici, le verbe « *est* » est pris dans un sens individuel, car on ne peut pas tourner la phrase ainsi : « Si un nombre est premier il est illimité ». Il faut la tourner ainsi. « L'individu constitué par « le groupe des nombres premiers » appartient à la classe des « groupes formés d'un nombre illimité de nombres ». C'est le groupe qui est un individu.

Or, si le verbe « *est* » était ici transitif, on pourrait faire le raisonnement suivant :

5 est un nombre premier, or, les nombres premiers sont en nombre illimité; donc 5 est un nombre illimité ; ce qui est absurde.

M. Peano représente le verbe être pris dans le second sens par la lettre ε initiale du mot ἐστι.

On voit par cet exemple combien il est risqué de faire des types de raisonnement du genre de celui-ci

« A est B, or B est C, donc A est C » ; beaucoup de gens, à regarder simplement, diraient : ce type est toujours valable. Or, il n'en est rien.

Le type de raisonnement tout A est B, or tout B est C, donc tout A est C est toujours valable. Ici, le mot *tout* indique que le verbe « est » a le sens général. Cette validité peut être démontrée. Nous supposons vraies les popositions générales.

1° Si l'individu x est A il est B ;

2° Si x est B il est C.

Et nous voulons démontrer que : Si x est A il est C.

Supposons vraie l'hypothèse de la proposition à démontrer, c'est-à-dire que « x est un A » alors la proposition I nous permet d'inférer que « x est un B. »

Puisque x est un B, la proposition II nous permet d'inférer que « x est un C ». Ce qu'il fallait démontrer.

Le raisonnement précédent est ce que l'on nomme un syllogisme en *barbara* ; il se compose de trois propositions universelles affirmatives. Tout B est C est la majeure, tout A est B est la mineure, et tout A est C est la conclusion. A est le petit terme (sujet de la conclusion). C est le grand terme (attribut de

la conclusion) B est le moyen terme, qui se trouve éliminé dans la conclusion.

Je n'entrerai pas ici dans le détail de la théorie du syllogisme, je me bornerai à quelques réflexions sur la nature du raisonnement.

On regarde souvent le syllogisme comme le type du raisonnement le plus simple. On admet que toute démonstration peut être réduite en syllogismes et que la réduction ne peut être poussée plus loin. Le seul fait que la légitimité du syllogisme peut être démontrée prouve que cela est inexact. Notre syllogisme a été réduit à deux inférences. Mais il y a plus ; il paraît bien impossible de réduire un raisonnement à un série de syllogismes de l'une des formes indiquées dans les traités de logique. Car il faudrait pour cela que toute affirmation puisse se réduire à celle-ci « l'objet x est situé dans la classe K. »

Au premier abord, cela paraît possible, et les logiciens semblent l'admettre, en disant qu'il n'y a qu'un seul verbe, le verbe *être*.

Effectivement, au lieu de dire : l'objet x est dans la relation α avec A, on peut dire : l'objet x appartient à la classe des objets qui sont dans la relation α avec A, mais si l'on a ainsi mis la proposition sous la forme demandée : « l'objet x appartient à une cer-

taine classe », la difficulté n'est que reculée, car il faut maintenant définir la classe considérée.

Les relations entre les objets peuvent être de natures si multiples qu'il serait impossible d'énumérer toutes les espèces de relations pouvant exister. C'est du reste là l'objet de chaque science et non celle de la logique. Nous allons seulement donner un exemple particulier qui conduit à une importante notion.

Supposons définie une classe d'objets dont nous ne spécifions pas la nature. Nous la nommons la classe K.

Supposons définie une certaine relation, *dont nous ne spécifions pas non plus la nature*. Nous écrirons A*pr*B pour dire que l'objet A est dans cette relation avec l'objet B (*pr* est l'initiale du mot *précède*).

Nous supposons que cette relation possède les propriétés suivantes :

1° La proposition A*pr*A n'est jamais vraie.

2° Si la proposition A*pr*B est vraie, la proposition B*pr*A est fausse.

3° Si A n'est pas identique à B et si la proposition A*pr*B est fausse, la proposition B*pr*A est vraie (A B C désignant toujours des objets de la classe K).

4° Si A*pr*B et si B*pr*C alors A*pr*C. En d'autres termes « *pr* » est une relation transitive.

Toutes ces propositions seront vraies si ABC désignent des grandeurs et si *pr* signifie « *plus petit que* ». Elles seront vraies encore si ABC désignent des points sur une droite horizontale, et si *pr* signifie « *est à gauche de* ». Elles seront vraies encore si ABC sont des dates d'évènements et si « *pr* » signifie « *est antérieur à* ». Elles seront vraies également si ABC désignent des grades dans une hiérarchie, et si « *pr* » signifie « *est un grade moins élevé que* ». Et l'on voit par ces exemples que la relation « *pr* » satisfaisant aux trois propositions générales 1, 2, 3, 4, définit la notion d'*ordre*, ou de *rang*.

Considérons deux objets de la classe K. Soient A et B ces objets, *non identiques*. D'après la proposition 3, ou bien A*pr*B, ou bien B*pr*A. Supposons, pour fixer les idées, que A*pr*B. Si un objet D est tel que A*pr*D et que D*pr*B, nous dirons que cet objet est *entre* A et B, ou qu'il appartient à l'*intervalle* AB. Les mots *entre* et *intervalle* se trouvent ainsi définis.

On peut démontrer la proposition suivante : si D est entre M et N, et si M et N sont entre B et C, alors D est entre B et C.

On suppose :

1° Que D est entre M et N, c'est-à-dire M*pr*D et D*pr*N ;

2° Que M est entre B et C, c'est-à-dire B*pr*M, et M*pr*C ;

3° Que N est entre B et C, c'est-à-dire B*pr*N et N*pr*C.

On veut démontrer que D est entre B et C, c'est-à-dire B*pr*D et D*pr*C.

Des deux faits B*pr*M et M*pr*D, on infère B*pr*D.

Des deux faits D*pr*N et N*pr*C, on infère D*pr*C.

On a donc prouvé que B*pr*D et que D*pr*C, c'est-à-dire que D est entre B et C, ce qu'il fallait prouver.

NOTION DE NOMBRE ORDINAL

Nous n'exposerons pas ici les principes de l'arithmétique, nous voulons seulement montrer comment des considérations analogues aux précédentes, nous permettent de définir les nombres entiers. Outre les quatre principes précédents, nous admettons ceux qui suivent :

5° Il existe dans la classe K un seul objet A tel qu'il n'y ait pas dans la classe K un objet B pour lequel B*pr*A. L'objet A sera nommé « *le premier* ».

6° Etant donné un objet quelconque M de la classe K, il en existe toujours un autre N tel que M*pr*N, et tel qu'il n'y ait pas d'objets entre M et N, et de même

si M n'est pas « *le premier* », il existe un objet P tel que P*pr*M, et tel qu'il n'y ait pas d'objet entre P et M.

Nous dirons que P est le *précédent* de M, et N le *suivant* de M.

7° Si une classe K' est contenue dans la classe K, et si elle ne peut contenir un objet sans contenir en même temps son précédent et son suivant, elle est identique à la classe K.

Ces sept propositions étant admises, l'objet nommé « *le premier* » a un suivant, que l'on nomme « *le second* » (prop. 6).

Le second a un suivant que l'on nomme « *le troisième* » ; le troisième n'est pas identique au premier, car si A, B et C désignent le premier, le second et le troisième, on a : A*pr*B et B*pr*C, donc A*pr*C (prop. 4) et puisque A*pr*C, A n'est pas identique à C (prop. 1).

Le troisième a un suivant que l'on nomme « *le quatrième* ; ce dernier n'est pas identique à l'un des précédents ; on le démontrera comme ci-dessus.

En continuant ainsi, on définit chaque nombre comme étant le suivant d'un autre déjà défini. Le fait que par ce procédé on définit tous les nombres, résulte du 7e principe. En effet, soit K' la classe des objets qu'on peut définir par ce procédé. Soit M un objet de la classe K', P son précédent, Q son suivant.

Puisque M est défini par le procédé, c'est que P l'est aussi, car le procédé consiste à définir chaque nombre après avoir défini son précédent. D'autre part, M étant défini, rien n'empêche de définir Q par le même procédé. Donc P et Q font partie de la classe K'. Donc (principe 7) la classe K' est identique à la classe K, et le procédé permet de définir tous les nombres.

On définira de même l'*addition* : soit a un nombre, $a + 1$ est par définition le suivant de a, $a + 2$ est le suivant de $a + 1$, $a + 3$ est le suivant de $a + 2$, etc. et comme ci-dessus, le principe 7 permet de démontrer que ce procédé suffit pour définir $a + b$, b étant un nombre quelconque.

Le principe 7 permet de démontrer la proposition suivante, nommée principe d'*induction complète*.

Si une proposition est vraie pour le premier nombre, si étant vraie pour un nombre elle est vraie pour son suivant, elle est vraie pour tous les nombres.

En effet, la proposition étant vraie pour le premier est vraie pour le second, étant vraie pour celui-ci elle est vraie pour son suivant, le troisième ; soit K' la classe des nombres pour laquelle la répétition de ce procédé permet de démontrer la proposition, M un nombre de la classe K' P son précédent, Q son

suivant. La proposition est vraie pour P, car c'est en démontrant qu'elle est vraie pour P, que le procédé permet ensuite de démontrer qu'elle est vraie pour M ; étant vraie pour M elle est vraie pour Q. La classe K' ne peut donc contenir M sans contenir P et Q, donc elle contient tous les nombres.

On peut démontrer toutes les propriétés des nombres à l'aide des sept principes énoncés ci-dessus. Le procédé à employer pour démontrer chaque propriété est l'application du principe d'induction complète. On démontre la propriété pour le nombre 1, et on démontre que si elle est vraie pour a elle est vraie pour $a + 1$. Je ne développerai pas cette manière extrêmement simple de présenter l'arithmétique.

La notion de nombre *cardinal* est différente de la notion de nombre *ordinal*, dont il vient d'être question. Voici comment on peut présenter cette notion :

Considérons une classe K' de nombres, définie par les principes suivants :

1° La classe K' contient le premier nombre.

2° La classe K' contient le nombre a.

3° Si la classe K' contient le nombre b et si b n'est égal ni à 1 ni à a, elle contient le précédent et le suivant de b.

4° La classe K′ contient le suivant de 1, elle contient le précédent de a, et *non son suivant*.

Dans ces conditions, on dira que la classe K′ contient a objets.

Je me bornerai à cette définition. Je ne discuterai pas les quelques difficultés qu'on peut lui opposer, telle que celle-ci : Il faut démontrer que le nombre d'objets d'une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les numérote. Ce principe se démontre en appliquant l'induction complète.

Ces théories semblent étrangères à la logique ; ce sont les principes de l'arithmétique. Si je les place ici, c'est pour donner au lecteur un exemple de ce qu'on peut nommer une *notion première*. La notion de *nombre* est indéfinissable ; celle de précédent ou suivant, également ; mais ces notions dont le sens reste forcément dans l'ombre, satisfont aux sept principes numérotés ci-dessus. En un sens, ces sept principes *définissent* la notion, ou pour être plus exact, ces principes permettent de raisonner sur la notion non définie.

Les mathématiques emploient d'autres idées ; nombre fractionnaire, nombre irrationnel, nombre positif ou négatif, quantité imaginaire. Mais ce ne sont pas là des notions nouvelles, ce sont de simples expressions abréviatives, ou simplement commodes.

Ainsi :

Dire que $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$, c'est dire que multiplier un nombre quelconque (divisible par trois et par 4) par 2, le diviser par 3, y ajouter le résultat obtenu en multipliant ce nombre par 3 et le divisant par 4, fournit le même résultat que si on le multiplie par 17 et qu'on divise le produit par 12, c'est-à-dire que A désignant un nombre choisi de façon à rendre possible toutes les divisions indiquées :

$$\frac{A \times 2}{3} + \frac{A \times 3}{4} = \frac{A \times 17}{12}.$$

et c'est là une égalité entre entiers. Ainsi une égalité entre nombres fractionnaires se ramènera toujours à une égalité entre entiers.

Dire que la diagonale d'un carré est, à son côté dans le rapport $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que si l'on prend une fraction $\frac{m}{p}$ du côté, c'est-à-dire m fois la n^{me} partie du côté, la longueur obtenue sera inférieure ou supérieure à cette diagonale, selon que le carré de la fraction $\frac{m}{p}$ sera inférieur ou supérieur à 2.

Pour les nombres négatifs, la chose est très simple, ajoutez — 7, c'est retrancher 7. Du reste, une

égalité entre nombres négatifs, se ramène à une égalité entre nombres positifs, en ajoutant aux deux membres un même nombre suffisamment grand.

Bref, toutes ces expressions : nombre fractionnaire, irrationnel, etc., pourraient être supprimées du langage, moyennant une périphrase ; elles ne constituent donc pas des notions. Il n'y a de véritable notion dans ce qu'on nomme en mathématiques « l'analyse », que celle du nombre entier.

L'introduction à la théorie des fonctions d'une variable de M. Tannery, le grand *traité d'analyse* de M. Méray sont faits à ce point de vue.

Ce n'est pas ici le lieu d'examiner les notions premières de chaque science. Nous le ferons en parlant de chacune d'elles. Ce que nous venons de dire suffit pour la définition d'une science rationnelle.

Une science rationnelle est un *ensemble de propositions générales :* les unes, indémontrables. constituant les *principes premiers de la science ;* les autres démontrables à l'aide de ces principes.

Nous examinerons, dans la seconde partie de ce travail, les principes de différentes sciences rationnelles, nous devons nous borner ici à leur définition. L'exemple, donné ci-dessus, de la science des nombres, suffit à la faire comprendre.

MÉTHODES DE DÉMONSTRATION DANS LES DIFFÉRENTES SCIENCES

Dans tous les traités de logique, on oppose la méthode déductive, allant, dit-on, du général au particulier, à la méthode inductive, allant du particulier au général. La méthode déductive, on l'a vu, ne va pas du général au particulier ; quelquefois elle va du particulier au général. Si donc il y a réellement, pour démontrer des propositions, autre chose que la déduction, cette autre méthode ne peut pas être définie comme ci-dessus. Comment alors définir cette méthode, en usage dans les sciences physiques ?

Pour définir le raisonnement déductif, nous avons donné un exemple ; nous allons faire de même, et chercher comment on arrive à une proposition de physique.

Il y a deux espèces de lois physiques. Les lois à vérification immédiate, et celles dont la vérification ne se fait pas directement.

On veut démontrer, je suppose, que l'angle d'incidence d'un rayon lumineux est égal à l'angle de réflexion. On admet que l'angle d'incidence reprenant la même valeur, l'angle de réflexion reprendra

toujours la même valeur. Dès lors, une seule série d'expériences suffira pour vérifier la loi. On donnera à l'angle d'incidence une série de valeurs très rapprochées les unes des autres, et l'on vérifiera chaque fois l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

Mais une telle vérification ne serait suffisante qu'en admettant : 1° Que la loi de la réflexion ne dépende pas de la nature de la surface réfléchissante ; 2° Qu'elle ne dépende pas de la courbure de cette surface ; 3° Qu'elle ne dépende pas de la lumière employée ni du milieu ambiant, ni de l'état de repos ou de mouvement de la surface.

La loi ne peut donc être considérée comme démontrée par cette vérification ; la vraie démonstration, celle qu'on peut nommer démonstration expérimentale ou induction, si l'on veut, est tout autre.

Faisons une science en ajoutant aux principes de la géométrie les principes suivants :

1° Un rayon lumineux dans un milieu transparent et homogène est une ligne droite.

2° Si ce rayon lumineux rencontre en A une surface polie non transparente, il se brise en ce point ; les deux côtés de la ligne brisée sont dans un même plan perpendiculaire au plan tangent en A à la surface, et font le même angle avec ce plan tangent.

De ces propositions, jointes comme je l'ai dit, à

celles de la géométrie, on peut en *déduire* beaucoup d'autres, en considérant différentes formes de surfaces réfléchissantes, ou en supposant qu'un rayon subisse plusieurs réflexions. L'accord constant de ce qu'on *déduit* de là avec l'expérience, est regardé comme suffisant pour prouver l'exactitude des propositions (1) et (2).

On pourrait aussi remplacer 1 et 2 par la proposition suivante :

La lumière se meut avec une vitesse constante dans un milieu homogène et va toujours d'un point à un autre par un chemin tel, qu'elle mette pour le parcourir, le *moins de temps possible*.

Ce principe possède sur les précédents, une grande supériorité, il permet d'examiner ce qui se passe quand la lumière passe d'un milieu transparent dans un autre où sa vitesse n'est pas la même. C'est ainsi que *Fermat* a découvert la loi de réfraction de la lumière.

On peut dès lors, à l'aide de ce principe, traiter complètement la science nommée optique géométrique, dont les applications aux lunettes, aux microscopes, à la photographie, etc., sont très nombreuses.

Toutes ces applications contribuent à vérifier la loi.

Telle est la véritable méthode des sciences physiques. On veut trouver un certain nombre de principes, de lois, suffisantes pour l'explication d'un ordre de phénomènes. Certains essais préalables font pressentir quelles sont ces lois, mais restent insuffisants pour les démontrer dans tous les cas. Admettez ces lois, dans toute leur généralité, et adjoignez-les aux principes de la géométrie (et quelquefois de la mécanique). Avec ces propositions comme principes, vous pouvez former une science, et cela par la *méthode déductive*. L'accord constant des résultats obtenus avec l'expérience pourra être considéré comme la démonstration expérimentale des lois admises.

On voit que la déduction joue, dans cette méthode, un grand rôle. On peut néanmoins appeler cette méthode *induction*, voici pourquoi : Dans la méthode déductive, les principes étant reconnus vrais, on affirme les conséquences. Ici, au contraire, les conséquences étant reconnues vraies, on affirme les principes.

Il y a un mot dont les logiciens font souvent usage, lorsqu'ils parlent des sciences expérimentales, et ce mot n'a pas encore servi ici. C'est le mot *cause*. Supposons une loi physique, s'énonçant ainsi : Si certaines circonstances A se produisent, le fait B

se réalise. Dans ces conditions A sera dit la cause de B. On voit que A est le fait servant d'hypothèse à la loi, B sert de thèse. D'après cela, on ne peut pas considérer la recherche des causes comme l'objet d'une science. L'objet est toujours la recherche de propositions générales, par conséquent la recherche des lois.

Nous reviendrons sur ce sujet à propos des sciences physiques.

CHAPITRE II

LA PUISSANCE DU RAISONNEMENT

Nous avons vu dans le chapitre précédent, de quelle nature est le raisonnement mathématique. Ce raisonnement peut d'ailleurs affecter des formes variées. Dans le calcul algébrique, par exemple, les propositions simples sont des égalités, qui s'écrivent au moyen des signes de l'algèbre. On fait encore ici des inférences : d'une égalité on conclut une autre, en vertu des règles du calcul algébrique. Ce sont donc ici ces règles qui servent de propositions générales autorisant le passage d'une égalité à une autre.

Dans certains autres cas, les constructions jouent un rôle prépondérant. Il en est ainsi par exemple, toutes les fois qu'on veut démontrer l'existence d'une objet possédant certaines propriétés. On indique la construction qui fournit cet objet. Elle peut être fort longue, et il peut arriver qu'il n'y ait presque rien à dire pour démontrer ensuite que cet objet remplit les conditions voulues.

On rencontre souvent des raisonnements par l'ab-

surde. Dans ces raisonnements, on suppose fausse la proposition à démontrer, et l'on déduit de là une conséquence absurde. Cette manière de procéder que l'on a souvent critiquée, présente parfois de grands avantages. Il y a des cas du reste où il serait impossible de l'éviter. Dans la théorie des séries, on démontre que le nombre appelé *e* est irrationnel, en démontrant que s'il était égal à un entier ou à une fraction, on serait conduit à la conséquence suivante : Un nombre entier serait compris entre zéro et un. On ne pourrait guère procéder autrement.

On rencontre parfois aussi des affirmations difficilement démontrables et qui se justifient par l'intuition. J'en donnerai un exemple. On a deux *vecteurs* AB et CD. Un *vecteur* est un segment de droite sur lequel on distingue une origine A, et une extrémité B. Cela posé, on dira que le vecteur CD est *dextrorsum* par rapport à AB, si un observateur couché suivant AB, de façon que la direction AB le traverse des pieds à la tête, et regardant le vecteur CD, voit le point D à droite du point C. On peut alors énoncer cette proposition : Si CD est *dextrorsum* par rapport à AB, AB est *dextrorsum* par rapport à CD. L'intuition le montre facilement. Une démonstration ne serait pas impossible, mais présenterait une certaine complication.

L'intuition joue un grand rôle dans le début de la géométrie élémentaire. C'est elle qui fournit les axiomes, comme nous le verrons. Elle joue aussi un rôle considérable dans la science nommée : « *Analysis sitûs* ». Cette science étudie les propriétés des figures qui demeurent inaltérées par une déformation continue quelconque.

D'où vient la puissance du raisonnement ? Cette puissance a souvent été niée. Le célèbre philosophe anglais Stuart Mill a soutenu cette opinion que le syllogisme (regardé souvent comme la forme type du raisonnement) ne saurait rien nous apprendre). Considérons ce syllogisme : « Tout animal est mortel, or l'homme est un animal, donc l'homme est mortel ». Ou bien nous savons d'avance que l'homme est mortel, et dans ce cas, point n'est besoin du syllogisme pour le démontrer, ou bien nous ne le savons pas, et alors le syllogisme ne nous le démontre pas, car il pourrait arriver que tout animal fut mortel, excepté justement l'homme.

Entrons dans quelque détail. On peut distingner les propositions analytiques, vraies par définition, des propositions synthétiques, démontrées par l'observation ou de toute autre manière. Les serins sont des oiseaux, les oiseaux ont des plumes. Voilà des propositions analytiques. Le syllogisme : « Tous les

oiseaux ont des plumes, or les serins sont des oiseaux, donc les serins ont des plumes, pourra être appelé syllogisme analytique. Il ne nous apprend rien, il offre une apparence ridicule. Plaçons-nous maintenant dans un autre cas. Un chimiste, je suppose, a découvert un nouveau composé d'hydrogène et de carbone, un nouvel hydrocarbure. Il fait ce raisonnement. Tous les hydrocarbures forment avec l'oxygène un mélange détonnant ; or le corps que j'ai découvert est un hydrocarbure, donc il forme avec l'oxygène un mélange détonnant. Son raisonnement cette fois n'est pas analytique, mais en revanche, il ne donne pas la certitude. Il est très probable que la conclusion est juste, car si les hydrocarbures détonnent avec l'oxygène, c'est pour une raison qui tient à leur composition chimique, et qui doit subsister pour tous ceux qu'on n'a pas encore réussi à préparer, pourtant cela n'est pas absolument sûr. Il semble donc que le syllogisme soit dans tous les cas impuissant. S'il est analytique, il ne nous apprend que des choses déjà connues, s'il est synthétique, il ne nous donne pas la certitude.

Mais le syllogisme n'est pas le raisonnement. La question de savoir si le raisonnement nous apprend quelque chose reste donc entière. Condillac a soutenu que toutes les propositions mathématiques

étaient analytiques, que si dans chacune d'elles on remplaçait les mots par leur définition, on obtiendrait des identités. Pour réfuter cette assertion, il suffit de faire l'expérience. D'ailleurs le fait que les sciences ont des axiomes, que l'on peut nier sans tomber dans la contradiction, prouve aussi la fausseté de l'opinion de Condillac.

Sans aller jusque-là, on peut dire : Il n'y a dans les conséquences que ce qu'il y a dans les principes. Affirmer les conséquences, c'est en réalité une manière déguisée d'affirmer les principes, en sorte que le raisonnement ne nous apprend pas quelque chose de réellement nouveau.

Pour répondre à cela, je ferai d'abord une remarque concernant la nature du raisonnement. Reprenons le raisonnement fait au chapitre premier. Nous avons admis trois propositions générales : 1° On peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite ; 2° Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaires à l'autre ; 3° Si deux droites sont perpendiculaire à un même plan elles sont parallèles, Nous en avons déduit la 4° proposition suivante : deux droites parallèles à une 3° sont parallèles entre elles ». Dans les traités de logique on considère les raisonnements comme des suites de syllogismes, nommées sorites.

Or, essayez de faire un sorite avec les trois propositions précédentes. Comme elles peuvent être rangées de six façons, l'essai ne sera pas long ; dans quelque ordre que vous les rangiez, l'échec est complet. Dans le raisonnement fait au chapitre Ier on s'y prend tout autrement. On se met en présence *d'un objet* composé de trois droites, dont les deux premières sont parallèles à la troisième. A ces objets, le 1er principe permet d'adjoindre un plan perpendiculaire à la 3e droite. Finalement on a trois droites et un plan et on *applique* les principes à cet *objet*.

Le raisonnement n'est donc pas l'art de combiner les principes, mais l'art de combiner des objets et d'appliquer les principes à ces combinaisons.

On peut maintenant donner la raison de cette puissance du raisonnement, qui d'un petit nombre de principes fait jaillir des sciences si complexes. Certains de ces principes peuvent être appelés *formateurs*. Ils permettent, avec les objets déjà connus, de former de nouveaux objets, et par la combinaison de ces objets entre eux, toujours de nouveaux objets, et cela à l'infini.

Je vais insister là-dessus, car c'est le point le plus important de la philosophie des sciences. Il s'agit au fond d'expliquer pourquoi la science rationnelle est possible. Les autres questions que nous exami-

nerons portent sur des sciences particulières. Celle-là porte sur la science en général, ou du moins sur la science rationnelle, la seule parfaite.

Le plus simple des principes formateurs consiste en la possibilité d'ajouter l'unité à un nombre quelconque, et par là de former un nouveau nombre. Les êtres appelés nombres sont ainsi formés à l'infini, et le principe d'induction complète permet de démontrer leurs propriétés. Mais il y a d'autres principes formateurs. Je vais examiner comment, dans une science, ces principes permettent de former indéfiniment de nouveaux objets et d'étendre ainsi à l'infini le champ de la science. Je prendrai successivement pour exemples l'analyse et la géométrie.

L'analyse étudie les fonctions. Indiquons, pour les lecteurs non familiers avec cette science ce que c'est qu'une fonction. On a une variable x, c'est-à-dire une quantité pouvant prendre différentes valeurs; si à chacune de ces valeurs on fait correspondre une valeur d'une autre quantité y, on dira que y est une fonction de x. Ainsi le carré, le cube de x sont des fonctions de x. Toute formule qui contient x, de telle sorte qu'on puisse en calculer la valeur quand x est connu, est une fonction de x.

Si donc on a plusieurs fonctions de x, leur somme,

différence, produit, quotient, et généralement toutes les opérations arithmétiques qu'il est possible d'exécuter sur elles, fournissent aussi des fonctions de x. C'est bien là un *principe formateur* permettant de trouver indéfiniment de nouvelles fonctions. Pourtant la grande cxtension de l'analyse résulte plus particulièrement d'un autre mode de formation des fonctions dont je vais maintenant dire un mot. On considère, en analyse des suites infinies de nombres. On ne peut écrire sur le papier une suite infinie de nombres, il est donc indispensable d'indiquer ce qu'on entend par « donner une pareille suite ». Or donner une pareille suite, c'est donner le moyen de calculer chaque nombre qu'elle contient, dès que l'on connait son rang dans la suite.

Il peut arriver qu'en prenant dans la suite un nombre de termes de plus en plus grand, la somme de ces termes se rapproche de plus en plus d'un nombre fixe. Dans ce cas, on dira que la suite est une série convergente, et le nombre fixe se nommera la somme de la série.

Or on peut supposer que les termes d'une série, au lieu d'être des nombres fixes soient des fonctions. Alors la somme de la série sera aussi une fonction. On a ainsi un nouveau mode de formation de nouvelles fonctions, un nouveau principe permettant la

formation de nouveaux objets. Ce principe fournit des fonctions bien plus intéressantes que la simple répétition des opérations de l'arithmétique.

Envisageons maintenant la géométrie. Cette science étudie les figures, c'est-à-dire les ensembles de points. Après l'étude des figures faisant l'objet de la géométrie élémentaire, droite, plan, cercle, on peut former de nouveaux objets à l'aide des principes mêmes de la géométrie. Par deux points on peut toujours faire passer une droite : si donc nous envisageons un cercle et un point hors du plan du cercle, on peut faire passer une droite par ce point et par chaque point de la circonférence. L'ensemble des droites ainsi construites formera une surface nommée cône à base circulaire. Nous avons donc formé un nouvel objet. Maintenant une droite et un plan se rencontrent toujours, sauf le cas d'exception où la droite est parallèle au plan. Si donc j'envisage un plan quelconque, il coupera les droites dont l'ensemble constitue le cône ci-dessus défini. On aura ainsi dans le plan, un ensemble de points formant une courbe, et qu'on nomme une section conique, ou simplement une conique. C'est encore là un objet nouveau à étudier. On voit par ces exemples simples comment les principes permettent de former de nouveaux objets et d'étendre ainsi la science. Mais

la géométrie analytique, inventée par Descartes, fournit un moyen bien plus puissant de définir des courbes et des surfaces. A un point on peut faire correspondre un groupe de deux ou trois nombres, selon qu'il s'agit de géométrie à deux ou à trois dimensions. Ce seront si l'on veut, les distances de ce point à trois plans rectangulaires. Toute relation entre ces nombres définira dans le plan une courbe, dans l'espace une surface. D'où un moyen nouveau de définir des courbes et des surfaces, aussi nombreuses qu'on voudra.

Le raisonnement, pourrait-on encore objecter, ne crée pas réellement des objets nouveaux, il peut seulement combiner de diverses façons des objets déjà connus. A cela on peut répondre que l'ensemble des pierres avec lesquelles un édifice doit être construit, ne constitue pas un édifice. Les principes d'une science, dit-on, contiennent la science tout entière. Cela est vrai, mais à la façon dont un bloc de marbre contient une statue. et personne ne soutiendra sérieusement que le sculpteur en faisant sortir la statue du bloc, n'en tire pas un objet nouveau.

DU RAISONNEMENT DANS LA VIE COURANTE

On oppose quelquefois le raisonnement scientifique, au raisonnement dans la vie courante. En quoi sont-ils analogues, en quoi sont-ils différents ? Je vais examiner ce point très brièvement.

Dans la vie courante, on fait des inférences. Les principes sur lesquels on se fonde sont de nature très variée. Quand un juge d'instruction fait ce raisonnement : « Un tel, accusé d'un crime, était à quarante kilomètres du lieu où ce crime a été commis, dix minutes avant l'heure du crime, donc il n'est pas coupable. » Le principe sur lequel il se fonde, c'est que personne n'a le don d'ubiquité, et que dix minutes ne suffisent pas pour faire quarante kilomètres. C'est là un exemple de raisonnement fondé sur un principe certain. D'autres fois, le principe n'est qu'extrêmement probable. « C'est aujourd'hui dimanche et il fait beau, donc un tel est sorti. » Inférence fondée sur les habitudes du personnage mais pouvant tomber en défaut. Les lois, les règlements peuvent fournir des principes. « Il a pris le train à telle heure, donc il est allé dans telle direction. » Le principe dans ce cas est tiré de l'indicateur des chemins de fer.

On voit que les inférences dans la vie usuelle diffèrent des inférences scientifiques. par la nature des principes, parfois fort incertains ; on est le plus souvent obligé de se contenter d'une probabilité. De plus ces inférences ne forment pas ces longues chaînes qui caractérisent le raisonnement mathématique. Mais l'essence du raisonnement est toujours la même, il n'y a pas deux manières de raisonner.

DEUXIEME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

LES AXIOMES

Il y a plusieurs manières de comprendre la façon d'étudier les principes fondamentaux de la géométrie. L'une, que je nommerai scientifique, l'autre, philosophique. La première est celle de M. Hilbert, l'autre, celle de M. Russel.

M. Hilbert pose des principes. De ces principes, qu'il montre indépendants et non contradictoires, on peut déduire la géométrie usuelle. En outre, M. Hilbert montre ce qui arrive si l'on rejette quelques-uns d'entre eux.

M. Russel se demande au contraire d'où viennent les principes de la géométrie. Sont-ils *a priori*, expérimentaux ou arbitraires. Peuvent-ils être démontrés en admettant, comme principe, la possibilité de l'expérience : c'est ce que croit faire M. Russel ;

il ne me semble pas qu'il y parvienne, et je ne crois pas qu'on puisse y parvenir.

Je vais examiner d'abord les principes de la géométrie au point de vue philosophique; le point de vue scientifique viendra ensuite.

En premier lieu, voyons la notion de point; cette notion est très obscure; au surplus, cette notion n'est qu'une sorte de fiction. Dans la réalité, on n'a que des corps très petits de dimensions inappréciables et non des points géométriques.

C'est ici le lieu de faire une remarque s'appliquant à toutes les sciences, c'est qu'une science ne prend pas ses axiomes exactement conformes à la réalité sensible. Nos sens, en effet, sont imprécis, il y a toujours un peu de flou dans les notions qu'ils nous donnent. Dès lors, ces notions se prêteraient mal au raisonnement; on les remplace par d'autres qui sont, en quelque sorte, des cas limites. Au lieu d'un corps très petit, nous mettons un point, au lieu d'un corps mince et allongé, une ligne, au lieu d'un corps très plat, une surface.

Mais alors, dira-t-on, on n'aura plus des résultats conformes à la réalité sensible.

Il faut se rassurer : la précision de certaines expériences de physique montre que le flou de la réalité sensible peut, avec des précautions, être rendu ex-

traordinairement faible. Nous reviendrons sur ce sujet à propos de la notion de distance.

Voici une manière très simple d'envisager l'espace qui va nous conduire à la notion de coordonnées d'un point, abstraction faite de toute mesure. Imaginons une série de surfaces telles qu'aucune d'elles ne coupe les autres : (nous dirons des surfaces parallèles) divisant l'espace en bandes. L'une de ces surfaces sera numérotée zéro, et d'un côté, nous numérotérons les surfaces $+1+2+3$ ... etc., de l'autre, $-1-2-3$ ... etc.

La bande comprise entre deux surfaces pourra elle-même être subdivisée par 9 autres surfaces en dix bandes plus minces. Les neuf surfaces comprises entre un et deux par exemple, seront numérotées, 1,1, 1,2, 1,3... 1,9. L'intervalle entre deux de ces nouvelles surfaces sera lui-même divisé en 10 et ainsi de suite. On poussera les subdivisions assez loin pour que deux surfaces consécutives soient indiscernables aux sens.

On obtient ainsi une série de surfaces ayant pour numéros des nombres décimaux, positifs ou négatifs : ce sera la 1re série.

Construisons deux autres séries pareilles, mais de telle sorte que toute surface de l'une des séries coupe toutes les surfaces d'une autre série : ainsi, les sur-

faces de la 1re série qui ne se coupent pas entre elles, coupent toutes les surfaces de la 2e et de la 3e série.

Le point d'intersection de trois surfaces (une de chaque série), aura ainsi trois numéros, les numéros des trois surfaces qui se coupent en ce point. Comme les surfaces sont assez rapprochées pour que les petites cases qu'elles déterminent puissent être considérées comme des points, on peut admettre que chaque point a ainsi 3 numéros, x, y, z, qui seront trois nombres positifs ou négatifs, et la connaissance de ces trois numéros détermine le point.

C'est ce qu'exprime cette phrase : l'espace est une multiplicité numérique à trois dimensions.

Ce qui précède n'est pas un raisonnement. C'est une sorte de construction faite en imagination. Il faut naturellement en admettre la possibilité. Nous avons fait en somme une sorte d'expérience mentale ; nous avons *quadrillé* l'espace.

Ce point acquis, nos raisonnements peuvent porter sur les numéros qui représentent les points et nous allons pouvoir montrer d'une façon bien claire, en quoi consiste un système d'axiomes de géométrie.

La géométrie, telle qu'on l'expose dans tous les ouvrages élémentaires, emploie dès le début la notion de *corps solide invariable*. On définit, en effet,

deux figures égales, en disant que deux pareilles figures sont superposables. Or, pour superposer deux figures, il faut transporter l'une d'elles. Qu'est-ce que transporter une figure. Si l'on dit : « c'est déplacer tous ses points de façon que la distance de deux d'entre eux reste constamment *égale* à elle-même pendant le mouvement », on fait un cercle vicieux. On définit en effet l'égalité en présupposant la notion d'égalité.

Il s'agit donc d'examiner de plus près cette notion de solide invariable, de voir quelle part de rationnel, quelle part d'expérimental se trouve en elle.

Au lieu de définir le corps solide invariable, il revient au même de définir le déplacement laissant le solide invariable, le déplacement sans déformation. Lorsque cela aura été fait, nous pourrons dire : deux figures sont égales, lorsqu'on peut amener l'une à coïncider avec l'autre par un déplacement sans déformation.

Je me servirai, dans ce qui suit, de la représentation du point par trois coordonnées (x, y, z). J'ai dit plus haut que cette représentation n'impliquait ni la notion de mesure de la distance, ni les notions de droite ou de plan. Elle renferme seulement un très haut degré d'arbitraire, les trois séries de sur-

faces dont nous avons parlé pouvant avoir des formes bien diverses.

Une *correspondance* ou *transformation* est un moyen de faire correspondre à chaque point P un autre point Q. Pour définir une correspondance. il suffit de se donner un moyen de calculer les coordonnées du point Q, connaissant celles du point P.

Si à chaque point P correspond un seul point Q et à chaque point Q un seul point P, la correspondance ou transformation sera appelée bi-univoque.

Q peut être appelé soit le transformé de P, soit le correspondant de P.

On peut imaginer bien des modes de correspondance et en fait, en géométrie, on en étudie un très grand nombre.

Considérons deux transformations A et B. L'une fait correspondre au point P un point Q, et la seconde fait correspondre au point Q le point R.

On nommera *produit* de ces deux transformations, celle qui au point P fait correspondre le point R.

La transformation *inverse* de la transformetion A est celle qui au point Q fait correspondre le point P.

On dit qu'un ensemble de transformations constitue un *groupe*, si le produit de deux transformations de l'ensemble, et la transformation inverse d'une trans-

formation de l'ensemble font encore partie de ce même ensemble.

Un *groupe* peut posséder des invariants. Soient deux points A et B qui, par une transformation du groupe sont changés en deux autres A′ et B′. On appellera invariant du groupe toute grandeur dépendant des deux points A et B (fonction des coordonnées de ces deux points) qui garde la même valeur, quand on remplace ces points par leurs correspondants. J'ai mis deux points pour fixer les idées, on pourrait supposer des invariants dépendant de 3 points, ou davantage.

Cela posé, on peut considérer le déplacement d'un corps comme une transformation, qui, à chaque point en fait correspondre un autre, la position qu'il prend après le déplacement. Les déplacements forment un groupe possédant les propriétés suivantes :

1° Deux points ont un invariant. En d'autres termes, il y a une certaine grandeur (la distance des deux points) qui ne change pas quand on fait subir un même déplacement à ces deux points.

2° Un point quelconque peut être transformé en un point quelconque, par un déplacement convenablement choisi. Il y a une infinité de déplacements laissant un point fixe, c'est-à-dire changeant ce point en lui-même, il y en a une infinité laissant

deux points fixes. Au contraire, il n'y en a pas laissant 3 points fixes sauf dans des cas particuliers (Quand les 3 points sont en ligne droite).

Ces axiomes, d'après *M. Sophus Lie*, sont les principes nécessaires à la géométrie métrique.

Ces axiomes ne suffiraient pas pour établir la géométrie usuelle, telle qu'elle est exposée dans les traités, mais ils permettent, en étudiant les différents groupes de transformations possédant les propriétés indiquées, d'obtenir les différentes espèces de géométrie possibles.

Helmholz, qui, bien avant Lie, étudia les mêmes questions, énonce 4 axiomes. Je les reproduis ici en les modifiant dans la forme :

1° Axiome des 3 dimensions. Un point est déterminé par 3 variables continues. (Il l'est par n variables si l'espace à n dimensions).

2° Le groupe de transformations appelées mouvements est tel que 2 points possèdent un invariant. (Le sens de ceci a été expliqué ci-dessus).

3° Par une de ces transformations on peut amener un point à coïncider avec un autre quelconque.

4° Si deux points restent fixes, il y a encore des mouvements possibles. Tous ces mouvements font

décrire à chaque point une ligne déterminée qui est fermée.

Sophie Lie a prouvé que ce dernier point, dit *axiome de monodromie*, était superflu.

Nous ne nous préoccuperons nullement ici de chercher quels sont les axiomes nécessaires et suffisants, ce que nous voulons faire remarquer, c'est la nature de ces axiomes.

Un point équivaut pour nous au groupe des trois nombres positifs ou négatifs qui sont ses coordonnées. Ceci nous fixe sur le sens de ce qu'on nommera une transformation ou une correspondance entre deux points. Faire correspondre un point P′ à un point P c'est donner un moyen de calculer les coordonnées de P′ connaissant celles de P.

Nous considérons les groupes de transformations tels que deux points aient un invariant. Cet invariant est nommé la distance des 2 points, pour le groupe considéré.

Dès lors, on voit bien qu'il y aura autant de géométries possibles que de groupes de transformations de l'espèce considérée.

Seulement nous ne considèrerons pas comme distinct deux groupes transformables l'un dans l'autre, comme je l'expliquerai plus tard, à propos du postulatum d'Euclide (Groupes isomorphes).

pace de corps à peu près solides, il y a une sorte d'indétermination dans les axiomes à admettre. Grâce aux corps solides on peut se fixer, du moins à peu près, par l'expérience.

Nous reviendrons sur ce sujet à propos du postulatum d'Euclide. Bornons-nous à constater ici que notre conclusion est en oppositton avec la façon de voir de M. Russell.

Je vais examiner maintenant la géométrie au point de vue logique. J'ai cité plus haut M. Hilbert. Il est l'auteur d'un mémoire où est posé un système d'axiomes pour la géométrie. Plusieurs notions indéfinissables y sont requises. On a trois espèces d'objets : des points, des droites, des plans. (Ce sont des objets dont on ne spécifie pas la nature). L'auteur énonce à leur sujet des principes ; il démontre que ces principes ne sont ni dépendants, ni contradictoires.

Le nombre des *symboles non définis* dont il faut se servir pour traiter la géométrie, est bien inférieur à celui qu'emploie M. Hilbert.

Dans une communication présentée au congrès des mathématiciens en 1900, M. Padoa indique deux manières de procéder. Je ne parlerai ici que de la seconde, plus simple que la première.

Pour être mieux compris dans la suite, je reviens

sur le sens des mots : « Symbole non défini » employé par M. Padoa. Comme nous l'avons vu, à propos de la notion de *rang*, on peut raisonner sur des *objets* et des *relations* entre ces objets, sans spécifier la nature de ces *objets* et de ces *relations*. Il suffit que l'on connaisse un certain nombre des propriétés de ces relations, et ce seront les principes ou axiomes à l'aide desquels on raisonnera.

Ces objets et ces relations sont ce que nous nommons des symboles non définis,

Or, M. Padoa montre que les seuls symboles non définis nécessaires pour l'étude de la géométrie, sont ceux qu'on désigne par le mot « *Point* » et par les mots « *est superposable à* ».

En d'autres termes, on peut envisager la géométrie de la manière suivante :

Nous considérons des objets, dont nous ne spécifions pas la nature, et que nous nommons des *points*. Entre deux systèmes de points pourra exister une certaine relation, dont nous ne spécifions pas la nature. Lorsqu'elle existe, nous dirons que le second système est *superposable* au premier.

En partant de ces deux notions supposées connues de point et de superposabilité, M. Padoa donne les principales définitions de la géométrie élémentaire.

Je n'indiquerai pas ici toutes les définitions de

M. Padoa je me borne aux plus importantes, sur lesquelles je ferai ensuite quelques remarques.

Dans ce qui suit, les lettres désignent des points, et le signe $=$ séparant deux systèmes de points, veut dire que ces deux systèmes sont superposables.

1° Définition de la ligne droite. On dit qu'un point x est sur la droite ab, s'il n'y a aucun point y tel que $ax = ay$, $bx = by$.

2e Définition du plan. On dit que x est dans le plan abc, s'il n'y a aucun point y, tel qu'on ait à la fois : $ax = ay$, $bx = by$, $cx = cy$.

J'indique encore les définitions suivantes, conduisant à la notion de segment de droite.

3° x est le *centre* de ab, si 1° il est sur la droite ab, 2° on a : $ax = xb$.

4° x est situé sur la *sphère* de centre a passant par b, si l'on a : $ax = ab$.

5° La sphère qui a pour pôles a et b est la sphère ayant pour centre le centre de ab, et passant par b.

6° cd n'entrelace pas ab, veut dire que la sphère de pôles ab et la sphère de pôles cd n'ont aucun point commun, $abcd$ étant en ligne droite.

7° c est un point du segment ab, signifie que, ou

bien c coïncide avec le centre x de ab, ou bien cx n'entrelace pas ab.

M. Padoa définit encore les perpendiculaires et les parallèles en ne se servant que de ses symboles. Si b est le centre de ax, x est le symétrique de a par rapport à b. cd sera dite parallèle à ab si le symétrique de a par rapport au centre de bc est un point de la droite cd.

Après avoir posé ces définitions, pour pouvoir raisonner, il faudrait énoncer un certain nombre de principes. M. Padoa s'en dispense à l'aide d'une remarque.

Supposons qu'on ait établi la géométrie d'une certaine façon en admettant d'autres symboles non définis que ceux que nous avons fait usage et en admettant un système de postulats ou principes. Nous pourrons changer de système de symboles non définis sans changer de postulats. En effet, au moyen du nouveau système de symboles non définis, nous pourrons définir les anciens symboles, et alors le système de postulats énoncé avec les anciens symboles conservera son sens, sans qu'on soit obligé d'en changer un mot.

On peut donc adopter, avec le système de définitions de M. Padoa, tout système de postulats adopté dans un autre mode d'exposition de la géométrie.

Si l'on présentait la géométrie aux débutants, de cette façon purement logique, ils seraient bientôt rebutés et cela pour deux raisons :

1° La géométrie leur apparaitrait comme un jeu difficile consistant à combiner des propositions et sans aucune relation avec le monde réel.

2° Ils ne verraient pas pourquoi on admet tel axiome plutôt que tel autre.

Pour cette raison, un bon traité de géométrie ne doit pas exposer cette science d'une façon purement abstraite ; il faut faire appel à l'intuition.

Cet appel à l'intuition ne diminue en rien la rigueur des démonstrations. L'intuition ne fait que fournir des axiomes, des principes.

La notion vague que nous avons du continu, (notion que l'on a cherché à préciser) rend évidentes certaines propositions qui, sans cela, paraitraient bien peu naturelles.

Je prendrai, par exemple, la notion de ligne droite. D'après M. Padoa la ligne droite se définit ainsi :

« Un point M est dit en ligne droite avec A et B, s'il n'existe aucun point M' distinct de M, tel qu'on ait à la fois AM = AM', BM = BM' ». Admettons cette définition. Elle est bien différente de l'idée que nous nous faisons d'une ligne droite. Si M est en

nir concentriques, alors si les distances ne sont pas égales, les deux sphères ne coïncideront pas et l'intuition nous apprend que l'une d'elles sera intérieure à l'autre. C'est celle-là qui aura le plus petit rayon.

On peut alors démontrer la proposition essentielle suivante : Si AB < CD et si CD < EF, on aura AB < EF.

En effet, plaçons concentriquement 3 sphères de rayons AB, CD, EF. Soient S, T, U, ces 3 sphères. Puisque AB < CD, tout point P de l'intérieur de S est à l'intérieur de T. Puisque CD < EF, tout point intérieur à T est intérieur à U. Le point P qui fait partie de l'intérieur de T sera donc aussi intérieur à U, donc tout point intérieur à S est intérieur à U, donc AB < EF.

Soient A et B deux points et une sphère S de rayon plus petit que AB, ayant pour centre A. Une sphère de rayon très petit ayant B pour centre, sera extérieure à S ; en la faisant grandir, elle finira par pénétrer dans S. Il est naturel d'admettre qu'il y a une certaine grandeur du rayon de cette seconde sphère pour laquelle elle touche S en un seul point M. On dira alors que AMB sont en ligne droite.

M est dans ce cas entre A et B. Mais on aurait pu

supposer le rayon de la sphère S plus grand que AB. Dans ce cas, la seconde sphère toucherait intérieurement la première, et M ne serait pas entre A et B.

Nous arrivons donc à la définition suivante : M est dit situé en ligne droite avec A et B, si les sphères de centre A et B et de rayon AM et BM n'ont pas d'autre point commun que M.

C'est la définition de M. Padoa, car s'il y avait un point M' autre que M tel que AM' = AM, BM' = BM, ce point serait commun aux deux sphères, elles auraient ainsi un point commun autre que M.

Nous admettons maintenant qu'un solide ayant deux points fixes, peut encore se déplacer. Considérons l'ensemble de nos deux sphères qui se touchent en M. En faisant tourner ce corps de façon que les centres A et B restent fixes, M ne bouge pas, car s'il venait en M' on aurait AM' = AM, BM' = BM, et par suite il y aurait un autre point que M commun aux deux sphères.

Réciproquement, supposons qu'un point M ne bouge pas quand le solide contenant les points ABM tourne autour de AB ; nous pouvons admettre qu'il n'y a pas un point M' tel que AM' = AM, BM' = BM, et que, sans cela, on pourrait amener M en M'.

Dès lors, on pourra définir la droite : On dit de M

est en ligne droite avec A et B, lorsque M ne bouge pas quand le corps AMB se déplace, A et B restant fixes.

Dès lors, les axiomes énoncés plus haut deviennent évidents. Si CDE sont en ligne droite avec A et B, le mouvement dans lequel A, B sont fixes ne déplace pas C, D, E. C'est donc le mouvement dans lequel CD sont fixes, donc le mouvement dans lequel CD sont fixes ne déplace pas E, donc E est en ligne droite avec C D.

On voit bien que dans tout ceci, nous avons admis certaines choses sans les démontrer. Mais ces choses se voient par l'intuition.

L'intuition nous prouve que deux sphères qui ne sont pas entièrement intérieures l'une à l'autre, ni entièrement extérieures se coupent. Les axiomes de cette espèce peuvent être appelés axiomes de continuité.

Au lieu de définir le plan comme le fait M. Padoa. on peut le définir comme le lieu des points équidistants de deux points fixes et l'on démontre facilement qu'une droite ayant deux points dans un plan y est située tout entière. (De Tilly. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome III, 1878).

CHAPITRE II

SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE

Le postulatum, ou axiome d'Euclide, est la proposition suivante : « Par un point on ne peut mener à une droite qu'une seule parallèle » on peut encore, comme le fait du reste Euclide, l'énoncer ainsi : « Si deux droites sont, l'une perpendiculaire, l'autre oblique sur une même troisième, ces deux droites se « rencontrent ». La réduction de l'un des deux énoncés à l'autre est facile, nous ne nous y arrêterons pas.

On a longtemps cherché une démonstration de cette proposition, puis l'idée est venue qu'elle pouvait bien être indémontrable. *Gauss* paraît être le premier qui chercha à constituer une géométrie en niant l'axiome en question. Le géomètre *Bolyaï*, qui fut sur ce sujet en correspondance avec *Gauss*, écrivit le premier ouvrage de géométrie non Euclidienne, fondée sur la négation du postulatum, et intitulée « La science absolue de l'Espace » Plus tard un autre géomètre russe, Lobachefki, traita le même sujet (vers 1830).

Riemann étudia les fondements de la géométrie, et montra qu'on pouvait nier non seulement l'axiome d'Euclide, mais encore cet axiome que la longueur d'une ligne droite est infinie.

La géométrie non Euclidienne présente des particularités bizarres. La surface d'un triangle ne peut pas dépasser une certaine limite : les points également distants d'une droite ne forment pas une droite, mais une courbe; il n'y a pas de figures semblables. Mais si l'on n'a jamais trouvé, parmi les conséquences de la négation de l'axiome, que des bizarreries et non des contradictions, on n'est pas pour cela fondé à croire qu'en poussant plus loin ces conséquences, on n'arriverait pas à des résultats contradictoires. Pour le montrer, il faut raisonner autrement.

Un géomètre italien, Beltrami, ayant étudié une certaine surface appelée par lui la pseudosphère, remarqua que la géométrie des figures tracées sur elle était identique à la géométrie plane non Euclidienne. De cette remarque résultait l'impossibilité de démontrer l'axiome d'Euclide par des considérations de géométrie plane. Ces considérations seraient valables pour la pseudo-sphère, et pour celle-ci l'axiome est faux.

Les travaux de Klein, de Cayley, de M. Poincaré, et de plusieurs autres géomètres démontrent su-

rabondamment l'impossibilité d'une démonstration.

Dans ce qui suit je démontre d'abord que le théorème « La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits peut remplacer l'axiome. » Les deux premiers théorèmes sont tirés de l'ouvrage d'Houel sur la géométrie élémentaire. J'examine ensuite quelques curieuses tentatives de démonstration du postulatum, puis je passe à la question de savoir si le postulatum est démontrable, et s'il est vrai. Comme les propositions suivantes n'exigent, pour être comprises que le 1er livre de Géométrie élémentaire, je suis entré dans beaucoup de détails pour les démonstrations, afin d'être compris même des personnes peu familiarisées avec le raisonnement géométrique.

THÉORÈME PREMIER

La somme des angles d'un triangle ne peut dépasser deux angles droits.

Supposons que l'on puisse construire un triangle ABC dont la somme des trois angles surpasse deux droits. Je vais montrer que cela conduit à une conséquence absurde. L'impossibilité de notre supposition sera alors démontrée.

Considérons (Fig. 2) une série de triangles, tous

égaux à ABC, à savoir ABC, CDE, EFG... HKL, rangés sur une même ligne droite. Les bases égales entre elles AC, CE, EG, sont situées sur la même droite AL. Je nommerai a le côté BC, b le côté CA, c le côté AB. Je supposerai qu'il y a n triangles en sorte que AL est égal à $n \times l$.

J'ai d'autres triangles, BCD, DEF,... qu'on forme en joignant les sommets BDF, etc... K. Ces triangles

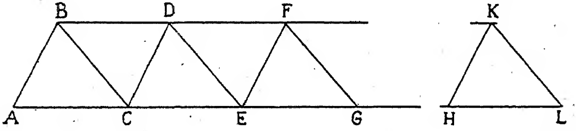

Fig. 2

sont aussi tous égaux entre eux : démontrons par exemple l'égalité des triangles BCD et DEF. Le côté BC est égal au côté DE, car chacun d'eux est égal à a ; le côté CD est égal à EF car chacun d'eux est égal au côté AB ou à c. L'angle BCD vaut deux droits moins la somme des angles BCA et DCE, qui sont justement les angles en C et en A du triangle ABC. L'angle DEF a la même valeur, deux droits moins la somme de deux angles égaux aussi aux mêmes angles du triangle ABC. Donc nos deux triangles sont égaux comme ayant un angle égal compris entre cô-

tés égaux chacun à chacun, et par suite BD=DF. On voit de même que tous les côtés de la ligne brisée BDF... K sont égaux. (J'appelle cette ligne ligne brisée, on ne peut démontrer que c'est une ligne droite sans admettre le postulatum d'Euclide). Si je nomme k la longueur BD, cette ligne brisée sera $(n\text{-}1)\ k$, car elle n'a que n-1 côtés.

Les deux triangles ABC, DEF ont deux côtés égaux; mais l'angle compris n'est pas le même, en effet l'angle DEF est, comme on a vu, égal à deux droits moins la somme des angles en C et en A du triangle ABC ; l'angle B du triangle est plus grand, puisque la somme des angles de ce triangle est supposée surpasser deux droits. On sait que si deux triangles ont un angle inégal compris entre côtés égaux, les troisièmes côtés sont inégaux, le plus petit correspondant au plus grand angle. On en conclut que b est plus grand que k; ou que $b\text{-}k$ est une quantité positive. Nommons h cette quantité.

La ligne AL est plus courte que la ligne brisée ayant mêmes extrémités, ABDF... KL, c'est-à-dire :
$nb < (n\text{-}1)\ k + c + a.$

$$\text{ou } (n\text{-}1)\ h < a + b + c, \text{ puisque } h \text{ est égal à } b\text{-}k.$$

Or cette inégalité est absurde. car on peut prendre n assez grand pour que le premier membre soit aussi

grand qu'on veut. Il ne peut donc être inférieur au périmètre du triangle ABC.

Notre hypothèse est donc absurde.

THÉORÈME II

S'il existe un triangle dont la somme des angles vaut deux angles droits, la somme des angles de n'importe quel triangle vaut aussi deux angles droits.

La démonstration se compose de plusieurs parties.

1° Supposons qu'il existe un triangle ABC, dont la somme des angles vaut deux droits. On pourra construire un autre triangle, aussi grand qu'on voudra, ayant les mêmes angles. (Figure 3.)

Prolongeons BC, d'une quantité CD égale à BC, et construisons un triangle ECD égal au triangle ABC ; La somme des angles réunis en C sur la figure est égale à deux droits, comme la somme des angles du triangle, on en conclut que l'angle ACE est égal au 3e angle A du triangle, et le triangle ACE est alors égal au triangle ABC comme ayant avec lui un angle égal compris entre côtés égaux, l'angle ACE égal à l'angle A du triangle ABC, le côté AC commun, le

côté CE égal au côté AB (puisque le triangle ECD est égal au triangle ABC).

Le triangle ACE étant égal au triangle ABC, AE est égal à BC. Construisons encore un triangle FAE égal au triangle ABC. La somme des angles en A vaudra deux droits, car ce sera la somme des angles du triangle ABC ; et de même pour la somme des angles

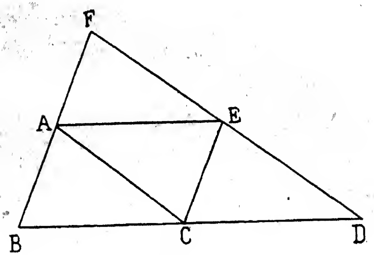

Fig. 3

en E, donc BAF et DEF seront des lignes droites. Le triangle FBD sera alors double du triangle ABC, et on voit bien qu'il aura les mêmes angles, les angles F et D étant par construction égaux aux angles A et C du triangle primitif. On pourrait ensuite avoir un triangle quadruple, etc.

2° Le triangle ABC étant toujours tel que la somme de ses angles vaille deux droits tout triangle ayant un angle égal à l'un des angles du triangle ABC possèdera la même propriété.

Soit en effet le triangle PSR tel que l'angle PSR soit égal à l'angle A. Nous pouvons construire un triangle GSH ayant ses sommets G et H sur SP et SR, aussi loin qu'on voudra sur ces droites, puisque GSH est aussi grand qu'on veut, et ce triangle GSH a mêmes angles que le triangle ABC (figure 4).

Joignons PH. GSH est divisé ainsi en deux triangles. La somme des angles de ces deux triangles est celle des angles du triangle GSH, plus la somme des angles réunis en P qui vaut 2 droits, cela fait 4 droits. Si donc la somme des angles de l'un des triangles était plus petit que 2 droits, l'autre serait plus grande, ce qui est impossible.

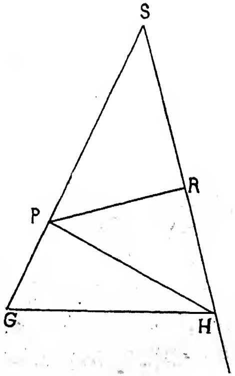

Fig. 4

La somme des angles du triangle GSP vaut donc 2 droits, et comme la droite PR décompose aussi ce triangle en deux, on voit de la même façon que précédemment, que si l'un de ces deux triangles avait une somme d'angles inférieure à deux droits, l'autre aurait une somme supérieure, ce qui est impossible.

donc la somme des angles du triangle PSR est égale à deux droits.

3° Supposons encore que le triangle ABC ait pour somme de ses angles deux droits, et considérons un triangle quelconque GHK. La somme de ses angles ne pouvant surpasser celle du triangle ABC, il est nécessaire qu'il y ait un des angles du 1er triangle G par exemple plus petit qu'un des angles A par exemple, du second. Nous pourrons alors faire un angle HGL égal à l'angle A, GL sera extérieur à l'angle HGK, puisque l'angle HGK est inférieur à l'angle A. Nous pouvons prendre L de façon que LH coupe GK en M (fig. 5).

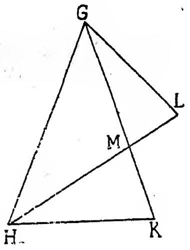

Fig. 5

L'angle HGL étant égal à A, la somme des angles du triangle HGL est égale à deux droits, d'après ce qu'on vient de démontrer. GM divise le triangle HGL en deux autres et d'après un raisonnement déjà fait, si l'un d'eux avait la somme de ces angles inférieure à 2 droits, l'autre aurait la somme de ses angles plus grande que deux droits, ce qui est impossible.

Donc la somme des angles du triangle GHM vaut deux droits et comme les triangles GHM, GHK ont un

angle commun, la somme des angles du triangle GHK vaut deux droits, d'après le n° 2.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

THÉORÈME III

Si l'on a démontré que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, il en résulte le postulatum d'Euclide.

On démontre d'abord facilement que la somme des

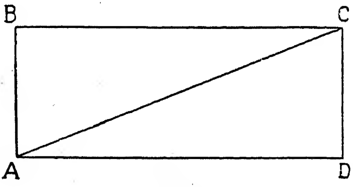

Fig. 6

angles d'un quadrilatère est égale à 4 droits en divisant le quadrilatère en deux triangles. En particulier, si 3 angles d'un quadrilatère sont droits, le 4e est droit, le quadrilatère se nomme un rectangle.

La démonstration va se décomposer en plusieurs parties.

1° Dans un rectangle, les côtés opposés sont égaux. En effet, soit un rectangle ABCD (fig. 6). Menons la

diagonale AC, elle décompose le rectangle en deux triangles rectangles. Dans un triangle rectangle, la somme des angles aigus vaut un droit. L'angle DAC vaut donc un droit moins ACD, il est donc égal à l'angle ACB. Ces deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse commune et un angle aigu égal, sont égaux, donc AB = CD et AD = BC, ce qui démontre la proposition.

2° Si deux segments de droite consécutifs AB, BC sont égaux et si, des points ABC on abaisse des perpendiculaires AH BK CL sur une autre droite on aura HK=KL (fig. 7). En effet, par B menons MN de façon à former un rectangle HMNL, décomposé en deux rectangles HMBK, KBNL. On aura HK = MB, KL = BN, or on démontre facilement l'égalité des deux triangles rectangles ABM, BCN, donc MB = BN, donc HK = KL.

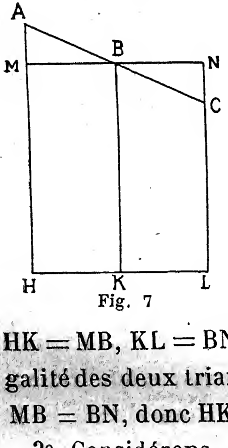

Fig. 7

3° Considérons deux droites AX, BY (fig. 8), l'une perpendiculaire, l'autre oblique sur AB, de façon que ABY soit un angle aigu. Sur BY portons des longueurs égales à la suite les unes des autres, et projetons-les perpendiculairement sur

BA. D'après le numéro 2° toutes ces parties étant égales, leurs projections sont égales. Si donc on prend sur BY une longueur égale à n fois la longueur a, soit BP, et si on mène PH perpendiculaire sur AB, BH sera n fois la projection de a ; on peut donc prendre n assez grand pour que BH surpasse AB, alors H n'étant pas entre A et B, P sera du côté opposé à A par rapport à AX, et BP coupera AX. Ceci démontre la proposition.

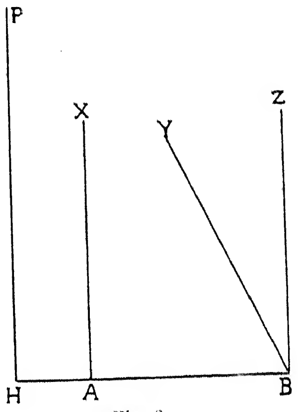

Fig. 8

M. Poincaré a indiqué une proposition équivalente au postulatum d'Euclide, et ne concernant que des longueurs, c'est la suivante :

On a trois points OHK tel que OH=KO, et un hexagone ABCDEF tel que : 1° tous ses cotés soient égaux ; 2° les distances de ses sommets aux points H et K soient douze longueurs toutes égales entre elles ; 3° les distances des mêmes sommets au point O soient toutes égales entre-elles. Alors ABCDEF étant six points équidistants de H et de K, situés dans

le plan mené par le milieu O de HK, perpendiculairement à cette dernière droite. Ce sont les six sommets d'un hexagone régulier de centre O. Si l'on a OA=AB, le postulatum est vrai, car le triangle OAB est équilatéral, il a alors ses trois angles égaux, et comme l'angle AOB est le $\frac{1}{6}$ de 4 droits, ou deux tiers de droits, la somme des trois angles vaudra deux droits. Donc d'après les théorèmes II et III, le postulatum sera vrai.

Examinons quelques tentatives pour démontrer l'axiome d'Euclide. On peut chercher à démontrer directement la proposition, ou bien à démontrer le théorème relatif à la somme des angles d'un triangle.

La démonstration de *Bertrand de Genève* est directe. Voici en quoi elle consiste. L'aire infinie comprise dans un angle AOB si petit qu'il soit, est supérieure à l'aire infinie comprise entre deux parallèles quelconques.

Pour démontrer ce bizarre principe, remarquons qu'en ajoutant un angle à lui-même un nombre suffisant de fois, on finit par recouvrir le plan tout entier. Si l'angle est plus grand que la $p^{\text{ième}}$ partie d'un angle droit, en l'ajoutant $4\,p$ fois à lui-même, tout le plan sera recouvert, puisque tout le

plan est recouvert par quatre angles droits. Au contraire prenons l'intervalle compris entre deux parallèles et juxtaposons-le à lui-même un nombre quelconque de fois, n fois par exemple. Au lieu de l'espace compris entre deux parallèles situées à la distance a, l'une de l'autre, nous aurons deux parallèles à la distance na, on n'arrivera donc pas à recouvrir tout le plan. Donc la portion de plan comprise dans un angle est plus grande que la portion de plan comprise entre deux parallèles quelconques.

Considérons maintenant, comme dans la fig. 8, deux droites AX BY, l'une perpendiculaire, l'autre oblique sur AB, et menons BZ perpendiculaire sur AB. L'angle compris entre BY et BZ renfermant une aire plus grande que l'aire comprise entre les deux droites AX et BZ, il est impossible que cet angle soit compris entre ces deux droites, donc BY doit couper AX.

Cette démonstration ne vaut rien. et en voici la raison. On ne peut comparer les aires infinies, comme on compare les aires finies. Il est possible, suivant la manière dont on fait la comparaison, de montrer, soit qu'une aire A est plus grande que C, soit que l'aire C est plus grande que A.

Pour rendre ceci apparent par un exemple, je vais montrer que en s'y prenant convenablement, on peut

recouvrir un angle droit avec l'espace compris entre deux parallèles AX et BZ perpendiculaires à AB en n'utilisant que la partie située au-dessus de AB. A cet effet nous pouvons considérer cet espace comme formé par des carrés empilés les uns sur les autres (fig. 9). Nous pouvons numéroter ces carrés ; celui qui touche AB aura le n° 1, le carré placé au-dessus du 1er aura le n° 2, etc. Un point quelconque de la région considérée, situé entre AB, AX et BZ, sera à l'intérieur de l'un de ces carrés. C'est ce qu'on exprime en disant : Les carrés remplissent toute la région.

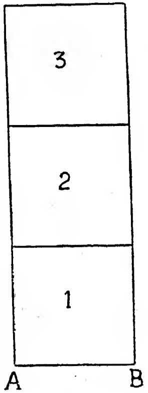

Fig. 9

Plaçons maintenant les carrés dans l'angle droit XAT de la façon indiquée dans la figure 10. Le n° 1 touche les deux côtés de l'angle, 2 est à droite de 1, 3 au-dessus de 1, 4 est à droite de 2, 5 à droite de 3, 6 au-dessus de 3, et ainsi de suite. On verra facilement qu'un point quelconque intérieur à l'angle droit sera intérieur à l'un des carrés ainsi placés. On a donc recouvert l'angle droit avec les carrés situés dans une région pourtant comprise dans cet angle et qu'on devait croire plus petite.

Ce que nous dirons plus tard des ensembles infinis fournira des exemples de faits analogues.

Au lieu de démontrer directement le postulatum, on peut chercher une démonstration du théorème relatif à la somme des angles d'un triangle. On peut fonder une démonstration sur cet axiome : « Des triangles égaux, aussi nombreux qu'on voudra, étant placés dans un plan, extérieurement les uns aux autres, on peut tous les enfermer dans un même triangle. » Ce principe est faux en géométrie non euclidienne puisque, nous l'avons dit, dans cette espèce de géométrie, l'aire d'un triangle est limitée. Si donc on l'admet, on pourra en déduire le postulatum.

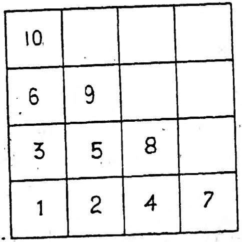

Fig. 10

C'est la base d'une démonstration due à un M. Carton, et qui se trouve dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences (vers 1867). Elle se trouve aussi dans la géométrie sans axiomes de Perronet-Thomson. Celle que je vais donner ici en

quelques mots est un peu différente et plus simple.

Reprenons la figure 2. Que le lecteur veuille bien marquer un point S au-dessus de cette figure, et joindre ce point aux points ADF .. K. Il obtiendra ainsi un pentagone SBALK. Comptons le nombre de triangles que renferme ce pentagone ; il y en a n égaux à ABC $n-1$ égaux à BCD et $n-1$ analogues à SBD, c'est-à-dire ayant un sommet en S. La somme des angles du triangle ABC sera deux droits moins une certaine quantité a, ou en abrégé, $2-a$. Celle des angles du triangle BCD sera $2-b$: alors la somme des angles des triangles égaux à ABC sera $2n-na$, celle des angles des $n-1$ triangles égaux à BCD sera $2n-2-(n-1)b$, celle des angles des $n-1$ triangles de sommet S sera $2n-2$ moins une certaine quantité k; $2n-2-k$. La somme des angles de tous les angles de la figure sera $6n-4-na-(n-1)b-k$.

D'autre part calculons autrement la somme de tous ces angles. Il y a d'abord la somme S des angles du pentagone. En C, E, etc... c'est-à-dire aux sommets situés sur AL, A et L exceptés, la somme des angles réunis vaut 2 droits. Il y a $n-1$ de ces sommets cela fait $2n-2$ droits. Aux sommets DF... c'est-à-dire aux sommets non situés sur AL, les points B et K exceptés la somme des angles réunis vaut 4 droits ; il y a

$n-2$ sommets de cette espèce. Cela fait $n-8$ droits. En tout on a pour la somme des angles de la figure. $6n - 10 + S$.

En égalant les deux valeurs de la somme des angles, on trouve que S est égal à 6 droits moins $(na + (n-1)b + k)$. On pourrait prendre n assez grand pour que S soit négatif, ce qui est absurde. Il faut donc que a b et k soient nuls, c'est-à-dire que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits.

Le défaut de cette démonstration est bien peu apparent. Le voici : On admet qu'il est possible de trouver un point S, tel qu'en le joignant aux sommets B, D..., K, etc., les lignes ainsi menées ne rencontrent pas la ligne brisée B, D... K. Or ceci n'est pas vrai dans la géométrie non euclidienne.

Une autre démonstration est fondée sur ce qu'on nomme l'homogénéité. Quand dans un triangle on connaît un côté et les deux angles adjacents, le triangle est déterminé, on peut le construire. Le 3e angle est donc connu, on doit pouvoir le calculer. Or si l'on change l'unité de longueur, le nombre qui mesure le côté change, et les angles ne changent pas. La formule donnant le 3e angle ne doit donc pas changer quand on change le nombre qui mesure le côté. Le 3e angle ne dépend donc que des deux autres angles. Soient A, B, C, les trois angles, A et B

étant connus, C est déterminé. Supposons que l'angle A soit droit. B étant connu, on pourra calculer l'angle C. Du sommet A menons AH perpendiculaire à BC, notre triangle rectangle en A sera décomposé en deux triangles rectangles, AHB, AHC, et l'angle A en deux angles m et n. L'angle B est commun aux deux triangles rectangles AHB ABC, dont l'un a pour second angle aigu l'angle m et l'autre angle C. C et m se calculeront donc de la même façon, et l'on aura $C = m$: De même $B = n$. Mais $m + n$ vaut un angle droit. donc $B + C = 1$ droit. Ainsi la somme des angles aigus d'un triangle rectangle vaut un droit. On en conclut facilement le théorème relatif à la somme des angles d'un triangle quelconque, par sa décomposition en deux triangles rectangles.

Le défaut de cette démonstration apparaît clairement, si on cherche à faire le même raisonnement pour les triangles sphériques. Le théorème n'est pas vrai dans ce cas ; c'est donc que le raisonnement n'est pas applicable. Cela tient à ce que la formule qui donne un angle connaissant les deux autres et un côté contient en outre le rayon de la sphère. Si elle ne doit pas changer lorsqu'on change d'unité, cela prouve qu'elle ne contient que le rapport du côté au rayon.

Or rien ne prouve que dans la géométrie plane il

n'y ait pas quelque longueur jouant le rôle du rayon de la sphère. C'est effectivement ce qui a lieu pour la géométrie non euclidienne ; il y a une certaine grandeur appelée quelquefois courbure de l'espace, et dont la mesure dépend de l'unité de longueur.

Nous venons d'examiner plusieurs tentatives de démonstration ; aucune d'elles n'est satisfaisante. « On ne peut pas démontrer le postulatum d'Euclide. » On peut se demander comment on est arrivé à mettre hors de doute une aussi singulière proposition.

D'abord, qu'entend-on en disant qu'une proposition est démontrable? La question n'est pas embarassante pour nous, nous avons indiqué, dans la première partie de ce travail, les règles de la démonstration. Démontrer une proposition, c'est la déduire d'axiomes ou principes admis, en suivant ces règles. Mais si l'on n'avait pas défini la démonstration, la question n'aurait pas de sens. D'après les idées de Décartes, une chose est démontrée dès qu'elle nous paraît évidente. Si donc le postulatum paraît à quelqu'un évident par lui-même, il est pour lui démontré, point n'est besoin d'y rien ajouter. Si quelqu'un trouve évidente une proposition, personne ne peut sérieusement le contredire et si quelque candidat au baccalauréat est interrogé sur la

démonstration d'un théorème et déclare que le théorème est évident, un examinateur cartésien devrait avoir quelque scrupule à lui marquer une mauvaise note. L'évidence, en effet, est purement personnelle, telle chose qui paraît évidente à l'un, est obscure pour l'autre.

Descartes me paraît avoir fait une confusion. Une démonstration bien faite produit en nous le sentiment de l'évidence, mais ce n'est pas l'évidence qui constitue la démonstration.

Nous rejetons donc la théorie de Descartes et nous adoptons une série de règles de logique, celles que nous avons exposées. Toute démonstration conforme à ces règles, est dite juste. Pour démontrer, il faut des propositions primitives appelées principes. Les principes de la géométrie suffisants pour démontrer toutes les propositions qui, dans les traités, précèdent le postulatum d'Euclide, permettent-ils de démontrer celui-ci. Telle est la question à laquelle on peut répondre par la négative.

Bien des lecteurs connaissent la transformation géométrique nommée inversion. Un point fixe O étant donné, à chaque point M on fait correspondre un point M', situé sur la droite OM et tel que le produit des distances de O aux deux points correspondants soit une quantité constante appelée puis-

sance d'inversion. Le point O est appelé le pôle d'inversion. A l'aide de cette transformation, à chaque figure on fait correspondre une autre figure. A un plan, à une droite, correspond une sphère, un cercle passant par le point O, *et vice versa*, et à des sphères ou cercles ne passant pas par O, correspondent d'autres sphères ou cercles. Deux lignes se coupent sous le même angle que leurs inverses (on nomme angle de deux lignes qui se coupent, l'angle des tangentes en leur point d'intersection).

Telles sont, rapidement énumérées, les propriétés de l'inversion. J'y ajouterai la suivante: si l'on a quatre points sur un même cercle et leurs quatre inverses, la fraction $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ a la même valeur pour ces quatre points et leurs quatre inverses. Cette fraction sera appelée le rapport anharmonique des quatre points.

Il n'est pas possible de trouver une inversion transformant chaque point M en un point très voisin de M, si, en effet, le point M est très éloigné de O, le point correspondant est très près de O. Au contraire, en faisant deux inversions successives avec deux pôles très voisins et deux puissances peu différentes, on transforme une figure en une autre peu différente de la première. Une telle transformation

peut être appelée infinitésimale. Un groupe de transformations est dit engendré par des transformations infinitésimales, si chaque transformation du groupe résulte de transformations infinitésimales du groupe faites successivement. Un groupe contenant toutes les inversions ne possèdera pas cette propriété, mais un groupe contenant toutes les transformations formées d'un nombre pair d'inversions, la possèdera.

Le groupe des déplacements possède cette propriété. Un déplacement quelconque peut être considéré comme résultant de plusieurs déplacements très petits. Le groupe de transformations contenant tous les déplacements et toutes les symétries, c'est-à-dire de toutes les transformations changeant un segment en un autre de même longueur, ne possède pas la propriété en question, car on ne peut pas trouver de symétrie changeant les points d'une figure en d'autres très voisins des premiers.

Ces préliminaires, peut-être un peu longs, seront utiles pour bien comprendre les considérations qui vont suivre. Nous allons considérer toutes les transformations n'altérant pas les angles, changeant en elle-même une sphère donnée. Il y a une infinité de pareilles transformations, car si l'on considère une

inversion ayant pour pôle un point quelconque et pour puissance d'inversion la puissance de ce point par rapport à la sphère, elle possède la double propriété exigée. Ces transformations changent un cercle coupant à angle droit la sphère donnée en un autre cercle possédant la même propriété.

Mais le groupe de ces transformations ne possède pas cette propriété d'être engendré par des transformations infinitésimales. Il contient un sous-groupe qui la possède. J'appellerai ce sous-groupe le groupe G.

Nommons la sphère donnée l'*absolu*. Nous ne considérerons que les points intérieurs à cette sphère. Nous ne nommerons *points* que les points de cet intérieur. L'espace sera l'intérieur de cette sphère, le reste ne comptant pas.

Le sens du mot *angle* sera conservé. Nous nommons *plan* et *droite* une sphère et un cercle coupant l'absolu à angle droit. Deux points A et B étant donnés, il y a une seule *droite* passant par ces deux points, *c'est-à-dire un seul cercle coupant l'absolu à angle droit*. Soient P et Q les deux points où il coupe l'absolu, le logarithme du rapport anharmonique ABPQ sera nommé *distance* des deux points. (Si l'on met le logarithme au lieu du rapport lui-même, c'est pour conserver la vérité de cette proposition : « Si B est sur le segment AC, on a $AB + BC = AC$. »

On nomme *déplacement* toute transformation du groupe G. Ces transformations conservent les angles, elles changent les *droites* en *droites*, les *plans* en *plans*, la *distance* AB en une *distance* égale, avec les nouveaux sens que nous avons attribués à ces mots.

On peut alors constater qu'*avec les nouveaux sens attribués aux mots*, toutes les propositions de la géométrie élémentaire qui précèdent le postulatum d'Euclide sont encore vraies. Au contraire, le postulatum est faux. Il n'est donc pas une conséquence des propositions suffisantes pour établir le commencement de la géométrie, c'est l'assertion que nous avions émise et qui se trouve ainsi justifiée (1).

Le postulatum est donc indémontrable. On peut le faire voir par d'autres considérations analogues aux précédentes.

Je citerai, en particulier, la géométrie non euclidienne de *Klein* et de *Cayley*. Dans cette géométrie, on considère encore une sphère appelée l'*absolu* et l'on appelle encore *espace* les points intérieurs à la sphère. Les mots droites et plans conservent leur sens, mais si une droite AB rencontre l'absolu en P et Q, on nommera *distance* AB le logarithme du

(1) Voir, pour plus de détails sur ceci, la note ajoutée à la nouvelle édition de mes *Leçons sur les méthodes de la géométrie moderne* (Librairie Hermann).

rapport anharmonique des quatre points A B P Q. On nommera *déplacements* les transformations d'un groupe K engendré par des transformations infinitésimales, changeant les droites en droites (transformations projectives) et conservant l'absolu. Ce groupe K possède les mêmes propriétés que le groupe G, et la géométrie de *Klein* et *Cayley* peut ainsi servir à montrer que l'axiome d'Euclide n'est pas démontrable.

Il existe une transformation qui change, comme nous allons l'expliquer, le groupe G dans le groupe K.

Soit *o* le centre, soit R le rayon de la sphère appelée l'absolu. Soit *m* un point intérieur à l'absolu, faisons-lui correspondre un point M situé sur la droite *Om* et tel que l'on ait la distance OM égale à deux fois le carré du rayon multiplié par *om* et divisé par le carré de *om* augmenté du carré du rayon. Cette transformation assez compliquée change en droites les cercles coupant l'absolu à angle droit. M. Darboux l'a étudiée complètement dans sa théorie des surfaces (Tome III, page 492). Si *m* et *m'* sont deux points transformés l'un de l'autre par une transformation du groupe G, la transformation que nous venons de définir les changera en deux points M et M' transformés l'un de l'autre par une transforma-

tion du groupe K. On exprime cela en disant que la transformation qu'on vient de définir change le groupe G dans le groupe K. Deux groupes ainsi changés l'un dans l'autre par une transformation sont dits *isomorphes*.

Deux groupes isomorphes ont des propriétés qui se correspondent, car la transformation fait correspondre à chaque propriété du 1er groupe une propriété du second. On peut dire en un certain sens que deux groupes isomorphes ont les mêmes propriétés.

Le fait que le postulatum d'Euclide est indémontrable peut se traduire par cette proposition : Le groupe des déplacements (en géométrie ordinaire) n'est pas isomorphe au groupe G ou au groupe K.

Le postulatum étant indémontrable, on se demandera s'il est vrai. En précisant bien la question, nous aurons sans peine la réponse. Une proposition générale est une proposition de la forme « si A est vraie, B est vraie» ou «il n'arrive jamais que A se vérifie, et que B ne se vérifie pas ». La proposition n'aurait pas de sens, si la vérification de A, ou celle de B, était impossible.

Au lieu du postulatum lui-même, prenons la proposition de M. Poincaré, équivalente au postulatum et ne concernant que des distances.

L'hypothèse A est la suivante : « On a 9 points :

ABCDEFHKO, on a OK = OH, tous les côtés de l'hexagone ABCDEF sont égaux entre eux, et ses six sommets sont tous à la même distance de H et de K de sorte que les douze distances des six sommets à H et à K sont égales entre elles. En outre les six distances des six sommets de l'hexagone au point O sont égales entre elles. »

La thèse B est la suivante : « La distance du point O à l'un des sommets de l'hexagone, est égale au côté de celui-ci ».

Il faut vérifier A, et vérifier B. Cela ne se peut que si l'on a quelque instrument pour vérifier l'égalité de deux distances. Ce sont ces instruments qu'on nomme des *solides*, et pour faire la comparaison on doit *déplacer* ces solides.

Or, on peut appeler solides des corps se déplaçant de façon que le groupe de leurs déplacements soit isomorphe au groupe G. Nous aurons alors des *solides non euclidiens* ; c'est le nom que nous donnons à ces corps. La distance ainsi mesurée sera dite *distance non euclidienne*.

Alors la proposition A se vérifiant, la proposition B se vérifiera ou ne se vérifiera pas suivant que les distances dont il est question dans l'énoncé des propositions A et B sont des distances euclidiennes, ou non euclidiennes.

On pourrait donc dire : Le postulatum n'est ni vrai ni faux, cela dépend de ce qu'on nomme *distance.*

Mais il y a dans la nature des corps que nous nommons solides, et c'est à l'aide de ces corps que, dans la pratique, nous mesurons la distance. Seulement ces corps ne sont qu'à peu près solides. Si l'on se sert de ces corps pour mesurer les distances, le postulatum se vérifie avec toute l'approximation que permet l'observation.

On peut donc dire. Les solides naturels sont approximativement euclidiens ; comme ils ne sont qu'approximativement solides, ce serait dénué de sens de dire qu'ils sont exactement euclidiens, ou qu'ils ne le sont pas. Nous appellerons distance la distance mesurée avec un solide euclidien. Alors le postulatum sera vrai par définition, et en même temps cette distance coïncidera, avec toute l'approximation que l'imperfection de nos instruments et de nos sens peut permettre, avec la distance mesurée avec les solides naturels.

NOTE SUR L'AXIOME D'ARCHIMÈDE

L'axiome d'Archimède est celui-ci. Soient deux grandeurs A et B de même espèce. En ajoutant B à

elle-même, un nombre suffisant de fois, on finit par dépasser la grandeur A.

M. Hilbert a fait une géométrie dans laquelle cet axiome n'est pas admis. Je ne développerai pas ici cette géométrie. Elle présente des particularités singulières, mais son exposition serait beaucoup plus difficile que celle de la géométrie non euclidienne. En effet, dans la géométrie non archimédienne, les grandeurs ne correspondent plus à des nombres, mais à des fonctions.

Je me bornerai donc à signaler cette géométrie.

TROISIÈME PARTIE

QUESTIONS DIVERSES

CHAPITRE PREMIER

DE L'INFINI

Considérons une classe d'êtres, bien définie. Pour qu'une classe soit bien définie, il faut : 1° qu'on sache reconnaître si un être donné appartient ou non à la classe ; 2° qu'on sache reconnaître si deux êtres de la classe sont distincts ou non.

Par exemple pour définir la classe des polyèdres réguliers convexes, il faudra : 1° donner le moyen de reconnaître si un polyèdre appartient à cette classe ; 2° dire dans quel cas on regardera deux polyèdres de cette espèce comme identiques. On est libre de considérer comme identiques deux polyèdres réguliers semblables. Si on le fait, on peut énoncer cette proposition : La classe des polyèdres réguliers convexes ne contient que cinq objets.

On a ainsi un exemple d'une classe contenant un certain nombre d'objets ; on dira qu'une pareille classe est finie.

Une classe peut ne contenir aucun objet ; telle est la classe des polyèdres réguliers dont les faces ont plus de cinq côtés.

Une classe qui contient des objets, mais qui n'en contient pas un nombre fini, est dite en contenir une infinité.

Par exemple il y a une infinité de polygones réguliers (deux polygones semblables étant considérés comme identiques).

Les classes contenant une infinité d'objets sont loin d'être rares en mathématiques et ne présentent rien de plus mystérieux que les autres. On peut parler de tous les polygones réguliers, bien qu'ils soient une infinité, aussi bien que de tous les polyèdres réguliers convexes dont le nombre est cinq.

Les classes finies donnent lieu à la théorie des nombres entiers, les classes infinies donnent lieu à la théorie des ensembles et de leurs puissances. Deux classes finies ont le même nombre si à chaque objet de l'une ont peut faire correspendre un objet de l'autre, des objets distincts correspondant à des objets distincts. Deux ensembles infinis ont même
si / puissance ~~et~~ à chaque objet de l'un on peut faire

correspondre un objet de l'autre. Il y a une classe infinie qui peut servir en quelque sorte de type, c'est la classe des nombres entiers.

On dira qu'un ensemble est de première puissance, s'il a même puissance que l'ensemble des nombres entiers, c'est-à-dire si à chaque objet de l'ensemble on peut faire correspondre un entier, de telle façon qu'à deux objets différents correspondent deux entiers différents.

Je vais insister un peu sur cette théorie, pour la faire servir à des questions de logique d'une nature assez singulière.

Un ensemble de première puissance est souvent nommé dénombrable. Cela tient à ce qu'on peut ranger ses éléments. On mettra le premier, celui qui correspond au nombre un, le second celui qui correspond au nombre deux, et ainsi de suite.

Les nombres rationnels, par exemple, c'est-à-dire toutes les fractions possibles, forment un ensemble dénombrable. Nous supposerons les fractions réduites à leur plus simple expression. De deux fractions nous mettons la première celle dont le numérateur ajouté au denominateur fournit la plus petite somme. Si ces deux sommes sont égales, la première des deux fractions sera celle qui a le plus petit numérateur. Or il n'y a qu'un nombre limité de fractions dont la

somme du numérateur et du dénominateur a une valeur donnée. En mettant les premières, celles pour lesquelles cette somme est 2, puis celles pour lesquelles cette somme est 3, etc., on rangera ainsi toutes ces fractions dans un ordre déterminé, de façon qu'à chacune d'elles correspondra un nombre entier égal à son rang.

De même, l'ensemble formé de tous les groupes possibles de trois nombres entiers (a, b, c) est dénombrable. De deux groupes nous mettrons le premier celui pour lequel la somme $a+b+c$ a la plus petite valeur, et si $a+b+c$ a la même valeur pour les deux groupes, nous mettrons le premier celui pour lequel a est le plus petit, et si a est le même dans les deux groupes, nous mettrons le premier celui pour lequel b est le plus petit. Comme il n'y a qu'un nombre limité de groupes pour lesquels $a+b+c$ a une valeur donnée, on voit qu'on pourra ranger tous ces groupes, et par suite faire correspondre à chacun d'eux un nombre entier égal à son rang. Comme conséquence de ce qui précède, considérons ce théorème, dit dernier théorème de Fermat. « Si n est un entier plus grand que deux, la somme de deux puissances n^{iemes} de deux nombres entiers x et y, n'est pas une puissance n^{me} d'un autre nombre entier ». On ne possède pas de dé-

monstration de ce théorème. Peut-être est-il faux. Je vais démontrer que s'il est faux, on pourra vérifier cela par un nombre limité d'essais. En effet, l'ensemble des valeurs (xyn) c'est-à-dire des valeurs qu'on peut attribuer simultanément au groupe de nombres (xyn) est dénombrable, d'après ce qui précède. Si donc il existe une valeur de x, de y, de n, telles que la somme des puissances n^{mes} de x et de y soit une puissance n^{me} exacte, ce triplet de valeurs occupera un certain rang p, alors après avoir essayé tous les triplets de valeurs jusqu'au rang p, on tombera sur ce système de nombres pour lequel le théorème de Format est en défaut.

Donc : si le théorème de Fermat est faux, on peut s'en assurer après un nombre limité d'essais. Mais ces essais sont si nombreux que la vie d'un homme, et même celle du globe ne suffiraient peut-être pas pour arriver au triplet (x, y, n) pour lequel le théorème est en défaut, après avoir parcouru tous les précédents.

J'envisage maintenant l'hypothèse où le théorème de Fermat serait démontrable. Sa démonstration fait alors partie d'un ensemble dont les éléments sont toutes les démonstrations possibles. Je dis que cet ensemble est dénombrable.

Considérons en effet, tout ce qu'on peut écrire, en

écrivant seulement n lettres. Comme il y a 26 lettres dans l'alphabet français, si on écrit n lettres on écrit un arrangement de ces 26 lettres n à n, la même lettre pouvant être répétée. Le nombre de ces arrangements est égal, comme on le démontre en analyse combinatoire, à 26 élevé à la puissance n. On peut cataloguer tous ces arrangements. Il n'y a qu'à les ranger par ordre alphabétique. Prenons d'abord les arrangements deux à deux, puis trois à trois, puis quatre à quatre,... puis n à n..., en les rangeant chaque fois : dans cette suite ainsi rangée, un arrangement quelconque n à n, occupera un rang, quelque grand que soit n. Parmi ces arrangements, quelques-uns, la plus grande partie, ne formeront pas même des mots. Biffons-les. Biffons aussi ceux qui forment des mots dont l'assemblage ne présente aucun sens. D'autres arrangements formeront des phrases ayant un sens, mais n'étant pas des démonstrations. Il est certain que l'Eneïde, ainsi que toutes ses traductions, dans toutes les langues employant notre alphabet, tous les poëmes, romans, œuvres littéraires de toute espèce, se trouveront parmi nos arrangements. Biffant tout ce qui n'est pas une démonstration complète et rigoureuse, on aura l'ensemble de toutes les démonstrations possibles, rangées dans un ordre

déterminé. Celles qui contiennent le moins de lettres seront les premières, et celles qui en contiennent le même nombre seront rangées par ordre alphabétique, comme les mots dans un dictionnaire. Chaque démonstration ayant un rang déterminé, celle du théorème de Fermat, si elle existe, occupera un certain rang. En examinant toutes les démonstrations dans l'ordre où elles sont rangées, on arriverait forcément, après un nombre *limité* de recherches, à celle du théorème en question.

On peut donc parvenir à toute démonstration par un nombre fini d'essais. Il est hors de doute cependant que cette méthode est impraticable. Supposons qu'une démonstration contienne 1.000 mots, et que le dictionnaire français contienne 10.000 mots. Le nombre d'arrangements avec répétition de 10.000 mots 1.000 à 1.000, c'est 10.000 élevé à la puissance 1.000, ou 10 élevé à la puissance 4.000. c'est un nombre de 4,001 chiffres, l'unité suivie de 4.000 zéros. Il est impossible d'avoir une idée d'un pareil nombre. Supposons une sphère d'un rayon si grand que la lumière, parcourant à la seconde 300,000 kilomètres mette 1 milliard de siècles à la parcourir, et cherchons le nombre de petits corps de la grossenr des globules de notre sang, que peut contenir cette sphère. Le nombre de globules ainsi trouvé sera

tellement petit comparativement à celui qui nous occupe, que nous ne pouvons nous faire aucune idée de cette petitesse.

J'ai supposé que le théorème de Fermat était démontrable. On regarde généralement comme évident que toute proposition relative aux nombres, ne saurait être vraie sans être démontrable. Cependant cela ne me paraît pas certain, et je cherche en vain une raison qui rende la chose vraisemblable. M. Hilbert, dans une communication « sur les problèmes futurs des mathématiques », faite en 1900 au Congrès des mathématiciens (comptes rendus du congrès, page 69), parle de cette possibilité de résoudre tout problème mathématique. Nous entendons, dit-il, toujours résonner cet appel : Voilà le problème. cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire « Ignorabimus ».

Le mot démontrable et le mot vrai, pourtant, ne semblent pas avoir exactement le même sens, quand il s'agit de démonstrations mathématiques. La proposition suivante nommée théorème de d'Alembert : « Toute équation algébrique a des racines ». N'est pas vraie quand par racines on entend des nombres entiers ou fractionnaires ou irrationnels. Pourtant, si l'on entend par racines des objets auxquels s'appli-

quent toutes les règles du calcul, sans savoir ce que sont ces objets, on peut arriver à cette conclusion que la proposition n'est pas contradictoire. (Voir les leçons d'algèbre supérieure de M. Tannery, rédigées par MM. Boret et Drack, dans lesquelles on se place à ce point de vue.) Mais de ce qu'un système de propositions ne renferme pas de contradictions, il n'en résulte pas qu'il y ait des objets satisfaisant à ce système de propositions, *et ne satisfaisant pas à une propriété autre que celles qu'on peut déduire de ces propositions.*

Cette question revient à la suivante: Si on peut construire une science, en admettant un certain nombre de symboles non définis, et certains axiomes de façon à ne pas avoir de contradictions, existe-t-il des objets représentables par ces symboles, de sorte que le système d'axiomes admis et ceux-là seulement soit vrai de ces objets. Le non-contradictoire est-il identique au possible. Cela paraît bien vraisemblable dans le cas où ces objets sont des nombres ou des groupes de nombres, mais je ne vois pas que ce soit certain.

Je vais maintenant montrer qu'il existe des ensembles non dénombrables.

Par exemple l'ensemble de tous les nombres possibles tant fractionnaires qu'irrationnels, compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable.

Un nombre quelconque compris entre 0 et 1 est représenté par une fraction décimale limitée ou illimitée. Pour définir une fraction décimale illimitée, il suffit de donner un moyen de calculer le n^{me} chiffre. Toutefois, il ne faut pas qu'à partir d'un certain rang, tous les chiffres soient des 9. Le nombre 0.99999... par exemple, serait égal à 1, comme le montre la théorie des fractions décimales périodiques.

Cela posé, considérons un ensemble dénombrable dont les éléments sont tous des nombres compris entre 0 et 1. Je dis que cet ensemble ne contient pas tous les nombres compris entre zéro et un. En effet, formons un nombre de la façon suivante : Nous mettons d'abord un zéro, puis une virgule, puis des chiffres choisis de telle sorte que le n^{me} chiffre de notre nombre ne soit ni un 9, ni le n^{me} chiffre du n^{me} nombre de l'ensemble dénombrable donné. Le nombre ainsi constitué ne sera pas dans notre ensemble. S'il y était, il occuperait un certain rang, le n^{me} par exemple ; puisqu'il serait le n^{me}, son n^{me} chiffre serait identique au n^{me} chiffre du n^{me} nombre de l'ensemble, ce qui est contraire à la façon dont notre nombre a été construit.

Considérons, d'une façon plus générale, une suite infinie de nombres. Donner une pareille suite, c'est

donner un moyen de calculer chaque nombre de la suite, connaissant son rang.

Toutes les suites possibles forment un ensemble non dénombrable. En effet, considérons un ensemble dénombrable de suites, je dis qu'il ne contiendra pas toutes les suites possibles. Formons en effet une suite S, en prenant des nombres de telle sorte que le n^{me} de ces nombres ne soit pas égal au n^{me} nombre de la n^{me} suite ; la suite ainsi formée ne fera pas partie de l'ensemble, car si elle en faisait partie, elle y occuperait un certain rang n, et alors le n^{me} nombre de notre suite serait identique au n^{me} nombre de la suite de rang n, or cela est contraire à la façon dont cette suite a été construite.

La conséquence que je veux tirer de là est celle-ci : il y a des suites sans loi, ou ce qui revient au même, des suites dont la loi de succession des termes ne peut s'énoncer où s'écrire avec un nombre fini de mots. Nous savons en effet que tout ce qu'on peut dire avec un nombre fini de mots forme un ensemble dénombrable, et comme l'ensemble de toutes les suites, possibles n'est pas dénombrable, il y a forcément de ces suites qui ne peuvent être données avec un nombre fini de mots.

Cette curieuse remarque m'a été indiquée par M. Tannery.

CHAPITRE II

DU CONTINU

M. Poincaré distingue le continu grossier ou vulgaire du continu tel qu'il est conçu par les mathématiciens. Des objets sont dits former un continu, si deux objets indistinguables séparément d'un 3e, peuvent néanmoins être distingués l'un de l'autre. Tel est la définition du continu vulgaire.

Je m'occuperai ici seulement du continu mathématique, et d'abord du continu dit linéaire ou à une seule dimension. Je vais énoncer les propriétés des points d'un segment de droite. Nous avons défini précédemment le mot « entre » et le mot « précède » et indiqué certaines propriétés des relations qu'ils expriment.

L'ensemble des points d'un segment AB possède les propriétés suivantes :

1° Il y a un point A et un seul n'ayant aucun précédent, un point B et un seul n'ayant pas de suivant.

2° De deux points du segment, il y en a toujours un qui précède l'autre.

3° Entre deux points, il y en a toujours d'autres.

4° Supposons l'ensemble des points d'une droite divisé en deux ensembles partiels, tels que tout point du 1er ensemble précède tout point du second. Alors il existe toujours un point séparant ces deux ensembles, c'est-à-dire tel que tous les points du 1er ensemble le précèdent, et qu'il précède au contraire tous les points du 2e ensemble.

Voici maintenant comment, à chaque point du segment on pourra faire correspondre un nombre.

Au point A je ferai correspondre le nombre zéro, au point B le nombre un. Je prendrai entre A et B un point que je nommerai son milieu et auquel je ferai correspondre le nombre $\frac{1}{2}$ soit D ce point. Entre A et D je prendrai un point, que je nommerai le milieu de AD et auquel correspondra le nombre $\frac{1}{4}$ entre D et B je prendrai un autre point que je nommerai son milieu, et auquel je ferai correspondre le nombre $\frac{3}{4}$. Il est clair que ce numérotage pourra être prolongé aussi loin qu'on voudra, et fournira ainsi des points dont les numéros seront des fractions ayant pour dénominateurs 2, 4, 8..., c'est-à-dire une puissance de deux.

Il sera convenable d'exprimer ces numéros à l'aide

de la numération binaire; dans cette numération, il n'y a que deux chiffres 0 et 1 ; deux s'écrit 10, 3 s'écrit 11, 4 s'écrit 100, 5 s'écrit 101, $\frac{1}{2}$ s'écrit 0,1, $\frac{1}{4}$ s'écrit 0.01, $\frac{3}{4}$ s'écrit 0,11, etc. Ces sortes de fractions seront nommées des fractions binaires.

Pour éviter l'arbitraire qu'il y a dans le choix du milieu de deux points, on peut supposer que l'on a une règle, une construction, qui de chaque couple de points permet d'en déduire un autre, toujours situé entre eux, et qu'on nommera leur milieu. Il convient que cette règle possède la propriété suivante : Si les numéros de deux points déterminés par cette règle sont a et b, et les numéros de deux autres c et d et si $a + b = c + d$, le milieu des deux premiers points coïncide avec le milieu des deux autres.

Considérons un point P du segment AB, qui n'est pas atteint par le numérotage précédent. Il sera toujours compris entre deux numéros α et β dont la différence est aussi petite qu'on voudra. α est une fraction binaire ayant autant de chiffres qu'on veut, et en définitive on verra qu'on peut donner au point P un numéro représenté par une fraction binaire illimitée.

Réciproquement, une fraction binaire illimitée représente un point dont elle est le numéro. Mettons en effet d'une part tous les points dont cette fraction binaire peut dépasser les numéros, quand on y met suffisamment de chiffres, et d'autre part tous les points dont cette fraction binaire ne dépasse jamais les numéros. On voit sans peine que les points de 1re espèce précèdent toujours les points de 2e espèce. Il y a donc, d'après ce que nous avons admis, un point séparateur et c'est ce point qui a pour numéro la fraction binaire donnée.

On voit que la division en deux parties égales suffit pour graduer un segment de droite. On pourrait faire l'application de ceci aux arcs de cercle qu'on ne sait pas diviser autrement qu'en deux parties égales.

Nous ferons l'application de ce mode de division d'une droite à l'établissement des principes de la géométrie projective. Pour le moment, bornons-nous à constater qu'elle conduit à la notion de nombre irrationnel considéré comme une fraction binaire illimitée.

Nous avons appris à donner des numéros à tous les points d'une ligne limitée. On étendra sans peine le numérotage à une droite illimitée. On pourra passer ensuite aux ensembles à plusieurs dimen-

sions. Dans un ensemble à deux dimensions un point possède deux numéros, dans un ensemble à 3 dimensions, il possède 3 numéros. Je n'insiste pas sur les ensembles à plusieurs dimensions, car j'en reparlerai dans le chapitre sur les trois dimensions de l'espace.

Je vais continuer ce chapitre par quelques considérations sur un paradoxe célèbre, nommé paradoxe de Zénon. On sait que les philosophes Eléates niaient le mouvement. L'idée de mouvement, prétendaient-ils, est contradictoire. Achille poursuit une tortue, dont il est séparé par un stade ; bien qu'il aille dix fois plus vite qu'elle, il ne l'atteindra jamais. Quand il parcourt ce stade, en effet, la tortue en parcourt $\frac{1}{10}$, pendant qu'il parcourt ce dixième de stade, la tortue en parcourt un centième, etc.

Le paradoxe est grossier. Achille parcourt le stade en un certain temps, prenons ce temps pour unité ; pour parcourir le dixième de stade qui suit, il ne lui faut qu'un dixième d'unité, pour parcourir le centième il ne lui faut qu'un centième de l'unité de temps, etc. Le temps total employé par Achille pour atteindre la tortue sera alors la fraction décimale illimitée, 1,11111... et d'après la théorie des fractions périodiques, enseignée en arithmétique

cela fait $1 + \frac{1}{9}$ ou $\frac{10}{9}$. On n'a du reste qu'à diviser 10 par 9 pour le vérifier.

L'erreur provient de ce qu'on confond le temps employé à parler de la course d'Achille avec le temps qu'il met à la faire. Vous dites, Achille parcourt d'abord $\frac{1}{10}$ puis $\frac{1}{100}$, puis $\frac{1}{1000}$, etc. Si vous vouliez continuer indéfiniment cette momenclature, il vous faudrait un temps infini, mais ce temps n'a rien de commun avec celui que met Achille pour atteindre la tortue.

On peut faire un paradoxe du même genre, mais beaucoup moins grossier, en employant la courbe appelée spirale logarithmique. Une droite OM tourne autour de O, pendant ce temps un mobile M parcourt cette droite de façon que si l'angle que fait OM avec une droite fixe OX croit en progression arithmétique, la longueur OM croisse en progression géométrique, la courbe décrite par le point M est une spirale logarithmique. Si l'on fait tourner OM en sens inverse, la longueur OM décroît au lieu de croître, et le point M décrit des spires de plus en plus rapprochées de O.

On peut démontrer que toutes ces spires sont des figures semblables. Supposons par exemple que la longueur de chaque spire soit dix fois plus petite

que celle de la spire précédente. Considérons un mobile parcourant la spirale de façon à se rapprocher du point O. Une première spire étant parcourue en une seconde, la suivante le sera en 0,1 de seconde, la suivante en 0,01, etc. Le temps employé à parcourir toutes les spires sera, 1,111, ou $\frac{10}{9}$, bien qu'il y ait une infinité de spires. Cela semble extrêmement étrange. On a peine à croire qu'il n'y ait pas là quelque contradiction. Cependant il y en a aucune.

Du reste, le continu fournit des propositions encore plus étranges. En voici une empruntée à l'ouvrage de M. Borel, sur les ensembles. Considérons un segment de droite AB, égal à l'unité de longueur. Pour abréger je dirai le point $\frac{1}{3}$ par exemple, pour indiquer le point dont la distance au point A est égal à $\frac{1}{3}$. Ce nombre sera le numéro du point. Il est clair que les points ayant des numéros commensurables sont infiniment rapprochés ; il semble donc bien que si autour de chaque point à numéro commensurable on enlève un petit segment, il ne doit rien rester sur la droite, cependant il n'en est rien. Si autour de chaque point à numéro commensurable égal à une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, on enlève un petit segment de part et

d'autre égal à $\frac{1}{b^3}$, il reste encore des points sur la droite, et il en reste même un ensemble non dénombrable.

Cette proposition dont je ne donne pas ici la démonstration, dépasse à coup sûr en étrangeté, tous les paradoxes des Eléates. Elle montre que le continu mathématique est quelque chose d'extrèmement singulier, beaucoup moins simple qu'il ne semble au premier abord.

Dans la pratique de la science, dans les théorèmes susceptibles d'application concrète, cette étrangeté du continu disparaît. Considérons le point ayant pour abcisse la racine carrée de un demi. C'est un point à numéro incommensurable. On démontre que ce sera un des points qui resteront dans l'ensemble ci-dessus. Considérons au contraire un point dont le numéro est la valeur approchée de cette racine carrée à un trillionième près. C'est un point à numéro commensurable, et c'est un de ceux qui ne restent pas dans l'ensemble. Mais dans la pratique, ces deux points ne se distinguent pas l'un de l'autre, tellement ils sont voisins. Dans toutes les applications pratiques de la science, on pourra les prendre l'un pour l'autre.

CHAPITRE III

LES TROIS DIMENSIONS DE L'ESPACE

Tout le monde répète que l'espace a 3 dimensions, et bien peu de personnes pourraient indiquer le sens précis de cette proposition. Les traités de géométrie qui énoncent cet axiome n'expliquent pas son sens. Quelques-uns semblent même l'obscurcir en disant que ces trois dimensions, nettes dans un cube, sont au contraire confuses dans une boule. L'idée la plus simple peut-être qu'on puisse se faire de l'axiome, est celle-ci : on peut construire un trièdre trirectangle, c'est-à-dire trois droites telles que chacune soit perpendiculaire sur les deux autres, mais on ne peut pas construire quatre droites telles que chacune d'elles soit perpendiculaire sur les trois autres.

Seulement un tel axiome n'a de sens que si l'on a défini l'angle droit. On ne pourrait l'énoncer au début de la géométrie.

Ceux qui ont fait de la géométrie analytique, donnent à l'axiome un autre sens. Un point est défini par trois coordonnées. Mais ceci n'est plus élémen-

taire, et d'ailleurs c'est soumis à des difficultés dont l'exposition m'entrainerait trop loin.

M. Poincaré, dans son ouvrage « la Science et l'hypothèse » donne la définition suivante : Un continu est un système d'éléments tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une série d'éléments successifs, tels que chacun ne puisse se discerner du précédent. C'est là la notion du continu vulgaire, dont nous avons déjà parlé. Si d'un continu C on enlève certains éléments, qu'on ne considère plus comme lui appartenant, on dira qu'on y a fait une coupure. Il pourra se faire que cette coupure transforme le continu C en plusieurs continus distincts.

Si un continu C peut être divisé par des coupures formées d'un nombre fini d'éléments, il sera dit à une dimension.

Si un continu C peut être divisé en plusieurs continus distincts par des coupures formant un continu à une dimension, et non par des coupures formées d'un nombre fini d'éléments, il sera dit à deux dimensions.

On définira ainsi, de proche en proche, un continu à *n* dimensions. On ne voit guère ce qu'on peut reprocher à cette définition. Elle revient à dire « on coupe une ligne en deux en enlevant à cette ligne un ou plusieurs points ; on divise une surface en

deux en en enlevant des points formant une ou plusieurs lignes ; un volume en deux en enlevant des points formant une ou plusieurs surfaces. La ligne a une dimension, la surface deux, le volume trois ».

Il y a une autre définition, peut-être moins bonne que la précédente en ce qu'elle fait intervenir la notion de temps, mais qui vient peut-être plus naturellement à l'esprit.

Un point en se déplaçant, engendre une ligne; une ligne en se déplaçant, engendre une surface; une surface en se déplaçant, engendre un volume. On ne peut continuer cette série au delà. Un volume en se déplaçant n'engendre pas autre chose qu'un volume. C'est ce que l'on veut dire en affirmant que l'espace a 3 dimensions.

Je vais préciser cette nouvelle définition. J'ai, je suppose, une horloge. C'est un cadran gradué sur lequel se meut une aiguille. Si un corps occupe la position A, en même temps que l'aiguille marque la division t, c'est-à-dire si dans le même état de conscience je vois le corps en A et l'aiguille en t, je dirai que le corps passe en A à l'instant t.

D'autre part, j'ai un point matériel. Ce sera un corps de dimensions si petites qu'il me sera impossible d'en discerner les différentes parties. Ce point

se déplace de façon que si l'on considère ses positions à deux instants suffisamment voisins, ces deux positions soient indiscernables. Je dis alors qu'il se déplace d'une manière continue. L'ensemble des positions successives du point formera alors une figure que je nomme une ligne.

A chaque valeur de t correspond alors un point de la ligne, à savoir le point où le mobile est passé à l'époque t.

Supposons alors une ligne matérielle. Elle est formée d'un ensemble de points matériels, dont chacun correspond à une valeur de t. Deux points qui correspondent à deux valeurs très voisines de t sont indiscernables. Supposons que cette ligne se déplace à son tour. Tous ses points décriront des lignes. L'ensemble de ses lignes sera dit former une surface. A chaque époque u correspondra une position de la ligne mobile.

La surface, en se déplaçant à son tour, engendre un volume qui peut être la totalité de l'espace, dans certains cas. *Plaçons-nous dans ce cas.* A chaque époque v correspondra une position de la surface mobile. Dès lors, considérons un point quelconque P de l'espace. L'une des positions de la surface mobile passe par ce point. Supposons qu'elle y soit passée à l'époque v.

Considérons le point P_1 de la surface mobile qui est venu en P à l'époque v. Quand la ligne mobile a engendré la surface, elle est passée par P_1 à une certaine époque. Supposons que ce soit à l'époque u. Soit P_2 le point qui engendre la ligne ; il est venu en P_1 sur cette ligne à une certaine époque. Supposons que ce soit à l'époque t.

t, u, v se nommeront les coordonnées de P. Dire qu'un point P a trois coordonnées, c'est dire que l'espace a trois dimensions.

On peut, il est vrai, faire à cette définition, l'objection que voici : La ligne n'est pas aussi bien définie qu'elle le parait. M. Peano a trouvé des fonctions continues x et y de t, tel que le point de coordonnées x y peut, quand t a une valeur convenable, coïncider avec n'importe quel point à l'intérieur d'un certain carré. Mais on peut éviter l'objection en disant que le point ne revient jamais à une position indiscernable d'une position déjà occupée.

On pourrait maintenant se poser sur cette proposition, « l'espace a trois dimensions » les mêmes questions que nous nous sommes posées sur le postulatum d'Euclide : Cette proposition est-elle démontrable, cette proposition est-elle vraie ou fausse, ou bien ne serait-elle qu'une convention commode.

Pour la première question, il faut remarquer

d'abord les conditions dans lesquelles elle est posée. La question analogue pour le postulatum d'Euclide était : Le postulatum peut-il être déduit logiquement des autres axiomes employés pour le début de la géométrie jusqu'à la théorie des parallèles. Mais pour l'axiome des trois dimensions, la question n'est plus la même, il se pose en effet dès le début. On peut poser la question autrement : Une géométrie à plus de trois dimensions serait-elle contradictoire ? Evidemment non. Supposons qu'on appelle point un système de quatre quantités, x y z t, rien n'empêche d'étudier les transformations qu'on peut faire subir à de pareils systèmes, on formera ainsi une géométrie à quatre dimensions, et en employant des conventions de langage appropriées, on aura des propositions tout à fait analogues à celles de la géométrie ordinaire, mais d'un caractère purement algébrique.

Il y a mieux, comme géométrie à quatre dimensions. Considérons une droite, il faut quatre quantités pour la déterminer ; elle est en effet définie quand on donne les points où elle rencontre deux plans fixes, choisis une fois pour toutes. Or ces deux points étant dans des plans donnés, ont chacun deux coordonnées seulement. Cela fait donc quatre nombres, quatre coordonnées pour définir la droite. On

exprime souvent ce fait en disant que l'ensemble des droites forme une variété à quatre dimensions. On dit aussi, qu'en considérant la droite comme élément générateur de l'espace, celui-ci a quatre dimensions.

On peut ainsi considérer dans l'espace des ensembles de figures ayant autant de dimensions qu'on voudra, et il convient, pour l'analogie, d'énoncer un peu différemment notre proposition primitive : nous dirons « l'ensemble des points de l'espace est une variété à trois dimensions ».

L'axiome n'est donc pas démontrable. Est-il vrai ou faux ? La première réponse à cette question, suggérée par ce qui précède, est qu'il n'est ni vrai ni faux. Il est vrai ou faux selon ce qu'on nomme point. Voici, je crois, comment M. Poincaré envisage la chose. Le groupe de tous les déplacements possibles contient des sous-groupes. Parmi ces sous-groupes, il y en a pour lesquels un point reste immobile. Donner l'ensemble des mouvements qui ne déplacent pas un point, ou donner ce point, c'est la même chose ; mais c'est le groupe des mouvements qui est observé directement. Si au lieu de porter notre attention sur les mouvements laissant un point fixe, on l'eut porté sur ceux qui laissent une droite fixe, on aurait appelé point ce que nous nommons droite, et l'espace aurait eu quatre dimensions. Je ne sais si

c'est bien là l'idée de M. Poincaré, car ailleurs il semble envisager les choses autrement.

Le géomètre est parfaitement libre de nommer point ce qu'il veut, et de prendre pour élément générateur de l'espace, soit la droite, soit la sphère, soit le plan, etc. En fait, de belles théories ont été constituées en se plaçant à ces divers points de vues, mais le physicien est obligé de garder le point comme élément générateur. Les corps matériels dont il s'occupe sont formés de points, et ces points ont une existence réelle, palpable, ils tombent sous le sens. Au contraire, les plans tangents au corps n'ont aucune existence réelle, ils sont une pure fiction.

En d'autres termes, pour le géomètre, le point est l'élément générateur de l'espace. L'espace est l'ensemble des points ; mais il est aussi l'ensemble des droites, l'ensemble des sphères, etc. Pour le physicien le point est un corps si petit qu'on ne peut y discerner aucune partie, et tous les corps sont formés de points, et pas d'autre chose. Les propriétés des corps ne dépendent que de leurs points. Il n'importe pas par exemple pour les propriétés d'un corps, qu'il ait ou n'ait pas de plans tangents communs avec Mars, Jupiter et le Soleil.

Comment acquérons-nous l'idée que l'espace a

trois dimensions. Nous acquérons l'idée de l'étendue des corps par le sens musculaire. Le sens musculaire est la sensation que nous éprouvons lorsque nous contractons nos muscles. C'est grâce à lui que nous avons conscience des mouvements de nos membres. Si nous touchons d'abord un corps, puis un autre, la sensation de l'effort nécessaire pour aller d'un corps à l'autre nous fournit l'idée de l'étendue qui sépare ces deux corps. Même quand nous apprécions une distance par la vue, le sens musculaire intervient. Lorsque nous examinons un objet, notre œil n'est pas immobile. Nous parcourons l'objet du regard, en déplaçant l'œil de façon que les différentes parties de l'objet se peignent successivement sur la partie sensible de la rétine. Le sens musculaire qui nous donne conscience des mouvements de notre œil intervient donc. Supposons qu'on fasse converger les axes des deux yeux vers un point A. Comme nous avons conscience du déplacement de chaque œil, nous apprécions en quelque sorte la grandeur des angles que font avec la ligne joignant les deux yeux, les droites allant de chaque œil au point A. Ces deux angles et l'angle que fait avec le plan horizontal le plan passant par le point A et par les deux yeux, fournissent en quelque sorte trois coordonnées naturelles du point A. C'est ainsi que

la vue nous fournit la notion de trois dimensions. Le stéréoscope est un appareil fondé sur ce principe. On a deux images juxtaposées d'un même objet, vues de deux points un peu différents distants l'un de l'autre, comme le sont les deux yeux. On regarde les deux images une avec chaque œil, à travers des prismes de façon que ces images soient superposées. On a alors la sensation de l'objet vu avec son relief.

Quelqu'un qui y consacrerait son existence, dit M. Poincaré, pourrait peut-être arriver à se représenter la 4^e dimension. Comment ce quelqu'un devrait-il s'y prendre. Je vais essayer d'indiquer comment je conçois la chose, tout en doutant fort qu'il puisse y parvenir.

Supposons des êtres n'ayant que deux dimensions et vivant sur un plan. Supposons sur ce plan un double dessin constituant la vue stéréoscopique d'un objet à 3 dimensions. Peut-être nos êtres, en palpant ce dessin, en se familiarisant avec lui, finiraient-ils par éprouver comme l'intuition du relief de l'objet. Si cela est possible, on pourrait construire deux objets à 3 dimensions qui soient les perspectives dans l'espace à 3 dimensions d'un même objet à quatre dimensions, prises de deux points de vue différents. La phrase que je viens d'écrire a un sens parfaitement précis, si bizarre qu'elle puisse sembler au

lecteur. Peut-être, en palpant longuement ces deux objets, pourrait-on acquérir l'intuition de l'objet à quatre dimensions dont ils sont la perspective. On aurait une vue stéréoscopique à 3 dimensions de l'objet considéré.

J'avoue que cette possibilité me semble extrêmement douteuse.

CHAPITRE IV

L'UNIVERS, LA MATIÈRE, L'ÉTHER

L'univers est-il infini, est-il éternel, la matière est-elle divisible à l'infini. Ces diverses questions, qu'on s'est posées depuis bien longtemps, paraissent insolubles. Nous allons les examiner ici en quelques mots.

L'univers est-il infini, cela peut signifier, y a-t-il une infinité d'astres, ou bien la matière totale a-t-elle une masse infinie; on pourrait encore trouver d'autre sens à la question, mais ces autres sens supposeraient la mesure de l'espace.

Il y a un argument, tout physique, contre l'infinité de l'univers. Cet argument n'est pas probant, mais je dois le citer d'abord. S'il y avait une infinité d'astres, il arriverait que ces astres étant distribués au hasard, une droite quelconque passant par l'œil de l'observateur, irait forcément rencontrer un astre plus ou moins éloigné. Cet astre étant lumineux, le ciel paraîtrait éclairé uniformément. L'éclat d'une surface en effet, ne diminue pas quand elle s'éloigne. L'intensité de la lumière est en raison in-

verse du carré de la distance, mais comme la grandeur apparente de la surface est aussi en raison inverse du carré de la distance, l'éclat de l'unité de surface ne diminue pas.

Cet argument est inadmissible pour plusieurs raisons. La principale est que la loi de décroissement de la lumière en raison inverse du carré de la distance, n'est qu'approchée. On admet que les ondes lumineuses se croisant en tout sens dans l'espace, se propagent chacune comme si elle était seule. On fait cela en vertu d'un principe d'analyse, appelé principe des petits mouvements, qui n'est qu'approché, d'autant plus que les mouvements vibratoires sont plus petits. La loi n'étant pas absolument exacte, on n'en doit pas tirer la conséquence indiquée plus haut.

Citons encore, dans un ordre d'idées tout différent, un vieil argument métaphysique. S'il y avait dans l'univers une infinité d'hommes, par exemple, chacun d'eux ayant plusieurs cheveux, il y aurait plus de cheveux que d'hommes, le nombre des hommes ne serait donc pas infini, puisqu'il y en aurait un plus grand, celui des cheveux.

Les propriétés des ensembles infinis montrent que cet argument ne vaut rien. On pourrait du reste démontrer d'une façon analogue que les nombres

premiers ne sauraient être qu'en nombre fini, car il y a plus de nombres (premiers ou non) qu'il n'y a de nombres premiers. On sait cependant que la suite des nombres premiers est infinie.

On dira, il est vrai, que les ensembles infinis sont des ensembles d'objets possibles, tandis que pour l'infinité du monde, il s'agit d'objets réels. Il faudrait alors montrer pourquoi un raisonnement n'ayant aucune valeur quand il s'agit d'objets possibles, peut en acquérir quand il s'agit d'objets réels. D'autre part, qu'est-ce que le réel, en quoi diffère-t-il du possible. On serait sans doute bien en peine de le dire.

On ne peut donc pas prouver que le monde est fini, on ne peut pas davantage prouver qu'il est infini. Si le monde est fini, il est possible, je crois, de prouver par des considérations de thermodynamique qu'il n'est pas éternel ; il n'en est pas de même s'il est infini.

Si le monde est infini, chaque astre peut évoluer, se refroidir constamment, et cependant l'ensemble rester toujours dans le même état, repasser périodiquement par le même état.

Supposons l'univers composé d'astres rangés en ligne droite, équidistants et formant une suite prolongée indéfiniment dans les deux sens. Chaque

astre aura un précédent et un suivant. Supposons que tous ces astres se refroidissent suivant la même loi, mais que chacun soit en retard d'un siècle sur le précédent, en sorte que à une époque quelconque, chaque astre possède la température qu'avait le précédent un siècle auparavant. Un être intelligent, vivant éternellement, mais quittant chaque siècle un astre pour aller habiter le suivant, verrait toujours l'univers dans le même état, il trouverait à chaque changement de domicile, le nouvel astre dans le même état où était, le siècle précédent, l'astre qu'il a quitté.

J'ai supposé un univers bien simplifié, mais cet exemple suffira pour démontrer que l'univers étant infini, peut rester éternellement dans le même état, bien que chaque partie, prise individuellement, se refroidisse.

La conception d'une époque où il n'y aurait rien, ou rien qu'une matière inerte, est pour l'esprit si profondément choquante, qu'on est porté à croire le monde éternel, et par conséquent infini, sans pouvoir en donner cependant aucune démonstration véritable.

Ces considérations sur l'infinité de l'univers sont forcément très vagues, et il convient d'être bien peu affirmatif. La répugnance que nous avons à conce-

voir un temps où rien n'existerait, ne prouve pas grand chose.

Si l'on admet l'infinité de l'univers, bien des points resteront encore obscurs. Existe-t-il en même temps une infinité d'astres arrivés à la période de leur évolution où ils sont habitables.

Si l'on répondait par l'affirmative à cette question, il en résulterait des conséquences bien curieuses, et en apparence paradoxales.

S'il y avait une infinité d'astres habités par des êtres intelligents, possédant un langage articulé, il y en aurait forcément plusieurs, une infinité même, où l'on parlerait la même langue.

Il y a en effet un nombre fini de langues possibles composées d'un nombre déterminé de mots. de cent mille mots par exemple. Cela est facile à démontrer par un procédé analogue à celui déjà employé à propos de la théorie des ensembles. Je ne m'arrêterai donc pas à justifier cette assertion,

Dès lors une même langue doit forcément être répétée plusieurs fois dans l'infinité des mondes. On ne veut pas dire par là qu'une langue déterminée, le français par exemple, soit nécessairement parlé dans quelque planète éloignée, mais il y a des langues (on ne sait lesquelles) parlées dans une infinité de planètes.

On peut faire la même remarque pour d'autres choses que les langues. Toutes les choses qu'on peut dire dans un volume ayant un nombre fixe de pages, par exemple trois cents pages, sont en nombre fini. Il résulte de là qu'il y a forcément une infinité de planètes ayant eu la même histoire racontable en trois cents pages.

De même pour la musique. Il y a un nombre limité d'opéras possibles pouvant se jouer en quatre heures par exemple. Donc s'il y a une infinité de planètes où l'on fait de la musique, il y a forcément une infinité de planètes où l'on joue le même opéra.

Ces choses singulières et paradoxales en apparence, résultent tout bonnement de cette remarque bien simple. Si l'on a un ensemble infini d'objets appartenant à un nombre fini de classes déterminées, il y a forcément dans l'ensemble, une infinité d'objets appartenant à la même classe.

Ce qui précède n'a pas de conclusion certaine et, je ne crois pas qu'on puisse en donner ; le problème de l'infinité de l'univers est enveloppé d'un nuage épais.

Voyons maintenant une autre question, la divisibilité de la matière à l'infini, et d'une façon plus gé-

nérale, les différentes façons de concevoir la matière.

Cette question est loin d'être aussi obscure que la précédente et bien des physiciens la croient résolue, et résolue par la négative. Les propriétés des combinaisons chimiques semblent en effet exiger qu'il y ait des atomes de chaque espèce de corps. C'est ainsi qu'une molécule d'eau, par exemple, est formée par la combinaison d'un atome d'oxygène à deux atomes d'hydrogène. Malgré les quelques difficultés assez sérieuses qu'elle présente, la théorie atomique est maintenant adoptée par les chimistes. Mais cette théorie n'est peut-être pas l'expression même de la réalité, elle correspond peut-être simplement à la réalité, à peu près comme une proposition de géométrie correspond à sa corrélative.

Lord Kelvin a indiqué différents moyens, pour arriver à connaître la grandeur des molécules des corps.

Je n'indiquerai pas ici ces différents moyens. Quelques-uns semblent assez probants. Celui qu'il fonde sur la théorie cinétique des gaz, et qu'il semble considérer comme le plus important a le tort de reposer sur une hypothèse très contestée.

Mais, quoi qu'il en soit, les méthodes de Lord Kel-

vin ne prouvent pas la non divisibilité à l'infini de la matière ; tout ce qu'elles prouvent, c'est que la matière n'est pas homogène dans ses plus petites parties.

Lord Kelvin n'indique pas la grandeur des atomes, ni même celle des molécules des corps composés, il indique l'ordre des grandeurs à partir desquelles les propriétés de la matière changent. Une petite quantité de matière, dit-il, n'a pas les mêmes propriétés qu'une grande quantité, de même qu'une brique n'a pas les propriétés d'un mur de briques.

Expérimentalement parlant, la matière est seulement une propriété de l'espace. Nos sens nous font connaître que les différentes régions de l'espace ne sont pas toutes pareilles. Certaines sont résistantes, notre main ne peut y pénétrer ; ou bien elles ne laissent pas passer la lumière, et présentent une coloration. En des termes plus abstraits, les différentes parties de l'espace présentent des propriétés différentes. Certaines de ces propriétés peuvent s'exprimer par des nombres. Ainsi en chaque point il y a une densité mesurable par certains procédés. Si cette densité est nulle, on dira qu'il n'y a pas de matière en ce point. De même en chaque point, il y a une température, une conductibilité, etc.

D'autres propriétés sont exprimées par

nombres, mais par des vecteurs. Ainsi en chaque point, l'attraction des autres corps a une certaine grandeur et une certaine direction. Elle est représentée par un vecteur partant de ce point. De même en chaque point il y a une force magnétique, une force électrique, représentées par des vecteurs.

Ces propriétés ne restent pas toujours les mêmes, elles varient avec le temps, et les lois de ces variations sont l'objet de la mécanique et de plusieurs autres sciences.

Expérimentalement, la matière est une pure propriété de l'espace. Voici un cube en A, au bout d'un certain temps il occupe une autre position B. Pourquoi dirais-je que c'est le même cube. Pourquoi ne dirais-je pas que la densité de l'espace occupant A a diminué jusqu'à zéro, celle de l'espace occupant B ayant au contraire augmenté. Pourquoi n'aurait-on pas un simple déplacement de la densité, comme, dans une vague liquide, il y a un déplacement progressif de la surface libre bien différent de celui des molécules liquides qui se bornent à osciller.

Lorsque j'attribue à la matière une existence plus réelle qu'à la densité, lorsque je fais de chaque particule un individu, je fais une hypothèse. Dans les corps solides qui se déplacent en conservant leur forme, cela n'apparaît peut-être pas très bien, mais

envisagez un liquide. Jetez dans la mer un litre d'eau, puis retirez-en ensuite un litre. Cette proposition. « Il y a dans ce litre d'eau de mer une partie de l'eau que j'avais jetée auparavant » a-t-elle un sens ? En somme l'identité d'un être n'a de sens que pour cet être, s'il est conscient. Si Paul et Pierre échangeaient leur sort et pouvaient faire que l'un ait exactement la situation de l'autre, pour tout autre chacun d'eux, rien ne paraitrait changé dans le monde. Au contraire à chacun d'eux le changement paraitrait sensible. Il semble qu'il y ait là un argument pour la spiritualité de l'âme, mais cela nous entraînerait hors de notre sujet. Retenons de ce qui précède, seulement ceci. Cette affirmation. « La même matière qui tout à l'heure était en A est maintenant en B ». n'a peut-être pas de sens ; elle n'est pas toujours vérifiable.

Disons un mot de quelques hypothèses sur la nature de la matière. Dans l'hypothèse de *Boscowitch*, la matière se compose de points matériels sans dimensions, séparés par des intervalles finis. Elle ressemble en quelque sorte à ces gravures ou de nombreux petits points très serrés font à l'œil l'effet d'une teinte uniforme. Cette hypothèse ne paraît pas soutenable. Si en effet cette hypothèse est bonne, elle doit donner un sens à la proposition. « Il y de la

matière au point A ». Or dans l'hypothèse actuelle, la matière doit avoir une action à distance, puisque les atomes ne se touchent pas. Dès lors, les propriétés de la matière ne seront pas concentrées en A, et l'on pourra dire qu'il y a de la matière très près de A, puisque très près de A les propriétés de l'espace sont modifiées. Pour éclaircir ceci, prenons une propriété de la matière, celle d'attirer la matière. Le point A étant matériel, attire la matière jusqu'à l'infini. Sa présence se faisant sentir à l'infini, on pourrait, en un certain sens, dire que la matière du point A est présente partout. Le point A toutefois diffère des autres points où sa présence se fait sentir, en ce qu'il est centre de forces. Mais on peut observer qu'une sphère matérielle homogène de centre A attire un point P, comme si elle était concentrée en A. Il n'y aurait donc rien de changé si au lieu de considérer la matière comme concentrée en A, on la supposait répartie à l'intérieur d'une sphère de centre A et de rayon très petit. Indépendamment de cette objection, d'une nature un peu subtile peut-être, il y en a une autre résultant de la difficulté extrême de la définition du point géométrique. En géométrie, nous l'avons vu, on peut, et même on doit se dispenser de définir le point; quant au point physique, c'est une portion de matière très petite, mais

que l'on ne peut guère concevoir réduite à rien.

Il est presque aussi difficile d'admettre l'hypothèse d'après laquelle les atomes seraient de petits corps solides extrêmement durs, absolument indéformables, ayant soit la forme sphérique soit toute autre forme. Si l'on pouvait faire une théorie complète de la matière, cette théorie devrait rendre compte des trois états, solide, liquide, gazeux ; elle montrerait pourquoi il existe des corps à peu près indéformables. Il est difficile de supposer que cette propriété n'existant qu'à peu près dans la matière observable, existe rigoureusement dans la matière infiniment petite.

De plus, un corps solide est limité par une surface parfaitement nette, et c'est là une notion purement idéale. Il est beaucoup plus naturel d'admettre que lorsqu'on passe d'un point où il y a de la matière à un point où il n'y en a pas, les propriétés définissant la matière s'affaiblissent graduellement, et qu'on ne peut dire d'une façon précise où commence la matière et où elle finit.

On admet aussi quelquefois que la matière est une modification de l'éther, un tourbillonnement de l'éther par exemple. Ce qu'on nomme ici éther, est une substance que l'on suppose répandue partout, ce qui servirait à transmettre la lumière. La

lumière serait un mouvement vibratoire de cette substance. Disons quelques mots de l'existence de ce fluide.

Bien des gens admettent difficilement qu'un corps puisse agir sur un autre à distance, ils admettent donc qu'il existe quelque chose remplissant l'espace, et servant d'intermédiaire entre les deux corps, pour transmettre cette action. L'attraction universelle est une action à distance. Elle offre cette particularité de se transmettre instantanément. Une autre action à distance est la lumière. Lorsqu'un corps lumineux éclaire un autre, il agit sur lui à distance. Cette action n'est pas instantanée, ce qui la rend encore plus difficile à admettre. En effet pendant le temps que la lumière se transmet, la cause a disparu et l'effet n'est pas encore produit.

Le phénomène de l'induction électrique consiste comme on sait dans le fait suivant. Si l'on a un fil fermé (circuit) A, qui se déplace dans le voisinage d'un courant électrique, ou bien si l'on fait varier ce dernier courant soit de position soit d'intensité, on produit dans le circuit A, un courant. C'est là aussi une action à distance du courant sur le circuit A. Les expériences de Hertz ont montré dans ce phénomène une grande analogie avec les phénomènes lumineux. En particulier l'action à distance du

courant sur le circuit n'est pas instantanée, elle se propage avec la vitesse de la lumière.

On sait que les courants agissent sur les aimants. Un pôle d'aimant placé dans le voisinage d'un courant, est soumis à une force d'une certaine direction et d'une certaine intensité. On peut donc dire qu'en chaque point il y a une force magnétique représentable par un vecteur. L'ensemble de tous ces vecteurs est ce qu'on nomme un champ magnétique. Quand un courant varie ou se déplace, le champ magnétique produit par ce courant varie, et c'est cette variation du champ magnétique qui produit l'induction sur un circuit A.

D'après la théorie actuellement admise, la lumière serait précisément une oscillation périodique du champ magnétique existant partout.

Maintenant si, pour expliquer ces phénomènes, on admet l'existence d'une sorte de fluide pénétrant tout, et que l'on nomme éther, on peut supposer deux choses.

Ou bien on admet seulement les propriétés de l'éther nécessaires à l'explication des phénomènes électriques et lumineux constatables, et dans ce cas on n'admet, semble t-il, que des choses dont l'expérience prouve l'existence, ou bien on admet autre chose et alors on fait une hypothèse que rien ne justifie.

J'explique cette affirmation « si l'on n'admet pour l'éther que les propriétés strictement nécessaires, on ne fait pas, à proprement parler, d'hypothèse. » L'expérience démontre l'existence du champ magnétique. Un champ magnétique, c'est quelque chose de bien réel, aussi réel que la matière, car on peut constater, à l'aide d'instruments, la présence d'une force magnétique en un point, aussi bien qu'on constate par les sens l'existence de la matière. L'expérience montre donc bien l'existence de quelque chose dans l'espace. A la vérité ce quelque chose ne saurait être assimilé à un fluide, mais il peut être assimilé au déplacement d'un fluide, car on définit le déplacement d'un fluide à l'aide d'un système de vecteurs. Chaque vecteur a pour origine la position d'un point du fluide avant le déplacement et pour extrémité la position de ce point après. Si l'éther n'est que le fluide fictif dont chaque vecteur représente le déplacement, il n'y a pas là une hypothèse proprement dite, mais seulement une commodité de langage.

Dans la théorie de l'électricité de Maxwell, ce n'est pas la force magnétique, mais la force électrique que l'on considère comme un déplacement, cette théorie peut donc se justifier en quelque sorte par des considérations analogues aux précédentes.

Revenons maintenant à la matière. On l'a considérée comme un tourbillonnement de l'éther. La théorie des atômes tourbillons est condamnée par ses conséquences contredites par l'expérience, mais de plus, comme le fait remarquer M. Poincaré, il serait étrange, après avoir prêté à l'éther toutes les propriétés de la matière (inertie, pression, etc.) pour établir les équations des tourbillons, de refuser ensuite à cette matière une existence propre. Pour expliquer les propriétés d'un objet A, la matière, on fait l'hypothèse qu'il existe un autre objet B (l'éther) ayant les propriétés de l'objet A, puis on refuse ensuite ces propriétés et toute existence propre à l'objet A.

CHAPITRE X

LA NOTION DE TEMPS

La vie d'un homme est un ensemble d'états de conscience. Deux perceptions sont dites simultanées, si elles font partie du même état de conscience. De deux états de conscience A et B, l'un a une influence sur l'autre, sans que le second en ait sur le premier. A, par exemple, a une influence sur B, mais B n'en a pas sur A. On dira alors que A précède B, et de plus si A précède B et si B précède C, A précède C, de telle sorte que les états de conscience peuvent être rangés. C'est ce qui constitue la notion de temps.

Mais on ne peut comparer ainsi que les états de conscience d'un même individu. Au contraire, pour deux individus différents, il y a une difficulté insurmontable à définir deux états de conscience simultanés, ainsi que l'a fait remarquer M. Poincaré. Même difficulté, bien aggravée, s'il s'agit de deux phénomènes se passant dans deux astres différents, et que nous percevons de la terre. En admettant d'une part la *loi de l'attraction universelle* s'exerçant *instantané-*

ment d'un corps à l'autre. et d'autre part une vitesse de la lumière de *trois cent mille kilomètres par seconde*, on constate que ces lois sont d'accord avec les observations que nous pouvons faire. D'autres lois seraient possibles, et les événements qui avec les premières doivent être considérés comme simultanés, ne le seraient plus avec les autres lois.

Laissons là ces difficultés, d'ordre métaphysique en quelque sorte. Nous devons surtout examiner la notion de temps dans ses rapports avec les différentes sciences.

En cinématique, science du mouvement considéré indépendamment des forces qui le produisent, le temps est simplement une *variable indépendante*, c'est-à-dire une quantité à laquelle on peut attribuer toute valeur possible. Si l'on donne les coordonnées d'un point en fonction de la variable t, à chaque valeur de t correspondra ainsi un point ; on dira que ce point se meut. Les différentes positions, correspondant aux différentes valeurs de t, formeront une courbe, ce sera la *trajectoire* du point.

On considère dans certains cas des mouvements à deux ou à 3 paramètres, c'est-à-dire que les coordonnées d'un point sont fonctions non pas *d'une* mais de *deux* ou *trois* variables. On pourrait dire que l'on a ainsi un temps à 2 dimensions, ou à 3 di-

mensions. Bien qu'on n'emploie jamais ces locutions, le seul fait qu'on pourrait les employer montre bien, qu'en cinématique, le rôle du temps est celui d'une variable indépendante quelconque.

Il en est autrement en dynamique, branche de la mécanique où interviennent les forces. Voici comment on surmonte, ou on croit surmonter, dans certains ouvrages, cette difficulté.

Pour mesurer le temps il faut définir deux temps égaux, et la somme de deux temps. Or, considérons un phénomène qu'on peut reproduire à volonté, dans des conditions telles, qu'il puisse être considéré comme identique à lui-même. Par exemple l'écoulement du sable en un lieu déterminé, dans un sablier déterminé. On admettra que la durée de cet écoulement est toujours la même. Si alors un phénomène commence avec l'écoulement et finit en même temps que lui, on dira que sa durée est égale à celle de l'écoulement. Si un phénomène commence avec l'écoulement, si un second phénomène commence quand le premier finit, et si ce second phénomène finit avec l'écoulement, on dira que la durée de l'écoulement est égale à la somme des durées des deux phénomènes.

On suppose ici qu'on a à sa disposition un phénomène type, ayant une durée constante et pouvant se

reproduire à volonté et commencer quand on veut. C'est pour la mesure du temps l'analogue du corps solide qu'on peut déplacer pour mesurer les distances. Mais pour la distance, on admet qu'on trouve toujours la même quel que soit le solide servant à la mesure. On doit admettre la même chose pour le temps.

Dans la pratique, on prend comme phénomène type la durée de la rotation de la terre, mais si ceci suffit dans la pratique, ce n'est peut-être pas suffisant pour l'astronomie. Si la loi de l'attraction universelle est absolument vraie, on doit très probablement admettre que la rotation de la terre s'accélère un peu, d'une seconde par siècle environ.

Il y a un autre phénomène qui pourrait servir de type : c'est la durée de vibrations produisant une lumière déterminée. Cette durée est extrêmement courte, l'unité de temps pratique pourrait être, par exemple 500 trillons, ou un quadrillon de ces vibrations.

QUATRIÈME PARTIE

CONSIDÉRATIONS SUR DIFFÉRENTES SCIENCES

CHAPITRE PREMIER

LE CALCUL DES PROBABILITÉS

Il arrive souvent que divers événements peuvent avoir lieu, et par une sorte de raison de symétrie, doivent être considérés comme également possibles. Donnons des exemples. Un dé possède six faces, si ce dé est un cube bien régulier, quand on le jette en l'air, on doit considérer comme également possibles les apparitions des diverses faces. Si, avec une pièce de monnaie, on joue à pile ou face, on regarde comme également possibles l'arrivée de pile et l'arrivée de face. Si l'on bat les cartes, elles sont ensuite rangées dans un ordre quelconque. Tous les ordres dans lesquels on peut les ranger, doivent être considérés comme également possibles.

Quand on a ainsi un certain nombre de cas également possibles, on appelle probabilité d'un événement, une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables à cet événement, le dénominateur étant le nombre total des cas possibles.

Par exemple, si l'on tire une carte dans un jeu de 52 cartes, la probabilité de tirer un as est $\frac{4}{52}$ ou $\frac{1}{13}$: en effet, il y a 52 cas possibles, et parmi eux il y en a 4 favorables à l'arrivée d'un as, puisqu'il y a 4 as dans le jeu.

Pour faire dans le calcul des probabilités, des raisonnements bien nets, il convient de fixer la nature des événements qu'on considère. On supposera par exemple que l'on a dans une urne, des boules toutes égales entre elles, et de couleurs diverses ; la probabilité de tirer une boule rouge sera une fraction dont le numérateur est le nombre des boules rouges contenues dans l'urne, et le dénominateur le nombre total des boules.

Comme exemple de ces démonstrations, nous en indiquerons deux, le théorème des probabilités composées, et celui des probabilités totales.

1° *Probabilités composées*. — La probabilité d'un événement composé de deux autres, est égale à la pro-

babilité du premier, multipliée par la probabilité qu'acquiert le second, quand on sait que le premier est arrivé. Supposons par exemple qu'une urne contienne en tout 17 boules, sur lesquelles il y en a 6 blanches et 11 colorées, et que parmi les 11 boules de couleur il y en ait cinq rouges. Je vais démontrer que : « La probabilité de tirer une boule rouge est égale à la probabilité de tirer une boule colorée, multipliée par la probabilité que l'on a de tirer une boule rouge quand on sait que la boule tirée sera une boule de couleur. » En effet d'abord la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{5}{17}$. D'autre part celle de tirer une boule colorée est $\frac{11}{17}$, et comme, quand on sait que la boule tirée est colorée, le nombre de cas possibles est réduit à 11, nombre des boules de couleur, la probabilité de tirer une boule rouge quand on sait que la boule tirée est colorée, est $\frac{5}{11}$; le théorème à démontrer est donc traduit par l'égalité $\frac{5}{17} = \frac{11}{17} \times \frac{5}{11}$.

Or c'est là une identité arithmétique, puisqu'on peut supprimer le facteur 11 au numérateur et au dénominateur.

2° *Probabilités totales.* — Si un événement peut se produire dans différents cas, la somme des probabilités de ces cas est la probabilité de l'événement, pourvu que ces cas s'excluent, c'est-à-dire ne puissent se produire ensemble.

Ainsi on a dans une urne 17 boules, dont 6 blanches, 5 rouges, 4 vertes et 2 bleues. La probabilité de tirer une boule colorée est la somme des probabilités de tirer une rouge, de tirer une verte, de tirer une bleue. La probabilité de tirer une boule colorée est $\frac{11}{17}$, c'est la somme des probabilités $\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}$.

Pour appliquer les propositions précédentes ou du moins la première d'entre elles, admettons que la tuberculose entre à Paris pour $\frac{1}{5}$ dans les causes de décès. Cherchons la probabilité que parmi les six ancêtres d'une personne, son père, sa mère, ses deux grands-pères et ses deux grand'mères, il y ait au moins un tuberculeux. Je vais prendre la chose indirectement en cherchant d'abord la probabilité pour que aucune de ces six personnes ne devienne tuberculeuse. La probabilité pour que la première ne le soit pas est $\frac{4}{5}$; la probabilité pour que ni la première ni la deuxième ne le soient, est égale, d'après le 1^er^ principe, à la probabilité pour que la première

ne le soit pas, multipliée par la probabilité pour que la seconde ne le soit pas ou au carré de $\frac{4}{5}$ c'est-à-dire à $\frac{16}{25}$; pour que ni l'une ni l'autre des trois premières ne le soient, ce sera le nombre précédent multiplié encore par $\frac{4}{5}$ ou $\frac{64}{125}$; pour que aucune des 4 premières ne le soient, ce sera le nombre précédent multiplié par $\frac{4}{5}$ ou $\frac{256}{625}$: pour que aucune des cinq premières ne le soient, ce sera le nombre précédent multiplié par $\frac{4}{5}$ ou $\frac{1.024}{3.125}$, enfin pour que ni l'une ni l'autre des six ne soit tuberculeuse ce sera le nombre précédent, encore multiplié par $\frac{4}{5}$ ou $\frac{4.096}{15.625}$.

Pour que cela ne se produise pas, c'est-à-dire pour que l'une d'elles au moins soit tuberculeuse, la probabilité s'obtient en retranchaut de un le nombre précédent. Si l'on veut, on peut encore dire sur 15.625 cas, il y en a 4.096 où aucune des 6 personnes n'est tuberculeuse, il en reste donc 11.529 où l'une au moins d'entre elles l'est. Cela fait environ 3 cas sur 4. On voit que, sans que la tuberculose soit héréditaire, on doit s'attendre à voir 3 fois sur 4 un tuberculeux avoir d'autres tuberculeux parmi ses ancêtres.

Cet exemple montre combien il faut se défier des preuves fondées sur la statistique.

Une notion importante dans la théorie des probabilités est celle de *l'espérance mathématique*. Je vais indiquer en quoi consiste cette notion, pour l'appliquer ensuite à la démonstration d'une curieuse proposition.

L'espérance mathématique d'une personne ayant des billets de loterie c'est, par définition, le prix que cette personne doit équitablement payer ses billets.

Supposons que 1.000 personnes se réunissent et donnent chacun 1 franc, on aura une somme de 1.000 francs. Supposons qu'on fasse une loterie de 250 billets, dont ces 1.000 francs sont l'enjeu. Il est clair que chaque billet devra être vendu quatre francs. Une personne ayant par exemple 11 billets, aura une probabilité de gagner égale à $\frac{11}{250}$, elle aura payé ses billets 4×11, or 4×11 c'est $1.000 \times \frac{11}{250}$, c'est la somme à gagner multipliée par la probabilité de l'obtenir.

L'espérance mathématique est ainsi égale au gain espéré multiplié par la probabilité de l'obtenir.

Je vais maintenant résoudre le problème suivant : On a une série de parallèles équidistantes, tracées sur une feuille de papier. On jette sur ce papier une

aiguille dont la longueur est inférieure à la distance de ces parallèles. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles tracées ?

La solution que je vais donner est due à M. Joseph Bertrand. Elle est fort curieuse et mérite d'être citée ici.

Au lieu d'une aiguille, nous supposons une courbe fermée rigide, en fil de fer par exemple. Nous supposons cette courbe convexe, pour que si elle rencontre une droite, elle la rencontre en deux points, et pas davantage.

Imaginons qu'on divise cette ligne en parties très petites, de longueurs égales, assez petites pour qu'on puisse les considérer comme des lignes droites. On leur donne à chacune un numéro, et ce sont autant de billets de loterie. On jette la courbe sur le système de ces parallèles. Si aucune rencontre ne se produit, on ne paie rien ; si il y a une rencontre, il y en a deux, les deux numéros qui rencontrent les parallèles reçoivent chacun une certaine somme, cent francs par exemple.

Il est clair qne la chance de gagner est la même pour tous les numéros, et qu'elle est indépendante de la forme de la courbe. En effet, tous les morceaux de courbe peuvent être considérés comme de petites droites d'égale longuenr ; le fait pour la petite droite

d'être liée à la courbe ne change rien à sa probabilité de couper l'une des parallèles, la probabilité est la même que si le petit morceau était découpé et lancé seul.

L'espérance mathématique d'un joueur qui a pris un billet, est égale à cette probabilité multipliée par cent. S'il prend plusieurs billets, l'espérance se trouve encore multipliée par le nombre de billets. Il est facile de voir que le fait que deux billets peuvent gagner ne change rien à cette conclusion. Si quelqu'un a pris tous les billets, son espérance mathématique se trouve donc multipliée par le nombre total des morceaux, elle est indépendante de la forme de la courbe, elle ne dépend que de sa longueur.

On peut aussi envisager cette espérance mathématique de la façon suivante : elle est égale à la probabilité que la courbe rencontre les parallèles, multipliée par 200, car si une rencontre se produit, il s'en produit deux et la personne possédant tous les billets gagne 200 francs. Cette espérance étant indépendante de la forme de la courbe, il en est de même de la probabilité pour qu'une rencontre se produise.

Supposons que cette courbe soit un cercle. On voit alors facilement que la probabilité est égale à une fraction, dont le numérateur est le diamètre du cercle et le dénominateur la distance des deux paral-

lèles. Si L est la longueur de la courbe, le diamètre c'est L divisé par le nombre π, rapport de la circonférence au diamètre. Si D est la distance des parallèles, la probabilité est donc L divisé par $\pi \times D$.

Si au lieu d'un cercle, on a une courbe fermée de longueur L, la conclusion subsiste, d'après ce qui précède. Une aiguille de longueur l peut être considérée comme une courbe fermée de longueur $2l$, repliée sur elle-même. Donc, pour cette aiguille, la probabilité d'une rencontre s'obtient en divisant $2l$ par $\pi \times D$.

Imaginons maintenant qu'avec l'aiguille on fasse un certain nombre d'épreuves, 10.000 par exemple, et qu'on note le nombre des rencontres, la fraction de dénominateur 10.000 et dont le numérateur est le nombre des rencontres, sera approximativement égale à cette probabilité; donc en multipliant la fraction obtenue renversée par $2l$ et divisant par D, on aura approximativement le nombre π, c'est-à-dire 3,1416.

J'ai fait autrefois l'expérience avec un millier d'épreuves et j'ai obtenu 3,1.

Le calcul des probabilités présente de nombreuses applications. Citons d'abord la théorie des jeux de hasard. Un jeu de hasard est équitable lorsque l'espérance mathématique de chaque joueur est égale à

sa mise. Il y a des jeux où l'espérance mathématique d'un joueur est infinie, de sorte que, quelle que soit sa mise, le jeu le favorise toujours. Tel est le jeu de Saint-Pétersbourg, dont parle longuement M. Bertrand dans son calcul des probabilités. Expliquons rapidement en quoi consiste ce jeu. Il y a deux joueurs A et B ; B jette une pièce de monnaie ; s'il amène face, il donne un franc à l'autre joueur, et la partie est finie ; s'il amène pile, il recommence ; si la seconde fois il amène face il donne deux francs à A, et la partie se termine là, s'il amène pile il recommence, si cette 3me fois il amène face, il donne quatre francs à A, s'il amène pile il recommence. Si cette 4me fois il amène face, il donne huit francs à A, et s'il amène pile il recommence, et ainsi de suite toujours en doublant la somme donnée à A.

Cherchons l'espérance mathématique de A. A peut gagner un franc du premier coup, la probabilité de ce fait est $\frac{1}{2}$, l'espérance mathématique de A est donc 0,50, pour le premier coup. A peut gagner deux francs au second coup, mais la probabilité de cela est égale à la probabilité pour qu'on amène pile au premier coup multipliée par la probabilité pour qu'on amène face au second, c'est donc $\frac{1}{4}$, l'espérance

mathématique de A est donc le quart de 2 c'est-à-dire 0,50. Au 3me coup, A peut gagner quatre francs, mais la probabilité n'est que $\frac{1}{8}$, comme il est facile de le voir. Le huitième de quatre francs c'est encore 0,50. On continuera ainsi, et pour chaque coup, l'espérance mathématique de A est de cinquante centimes. Cela fait cinquante centimes une infinité de fois. L'espérance mathématique de A est infinie.

Ce résultat, quelque surprenant qu'il puisse paraître, n'a rien de contradictoire. Il faut l'accepter. Mais, dira-t-on, on serait fou de risquer cent francs à ce jeu. Cela est vrai, mais il est vrai aussi qu'on serait peu sage de risquer 100 francs à une loterie, où le prix de billet étant cent francs, la somme à gagner un milliard, il y aurait un million de billets. On aurait 999,999 chances de perdre les cent francs, mais on paierait le billet 10 fois moins cher qu'il ne vaut, car l'espérance mathématique est de 1.000 fr. Quand on joue gros jeu, c'est toujours très dangereux, même quand le jeu vous favorise. Telle est la réponse de M. Bertrand au paradoxe de Saint-Pétersbourg, et c'est celle que l'on doit adopter.

Bien des gens s'imaginent pouvoir toujours gagner en adoptant la tactique suivante. « On joue chaque jour jusqu'à ce qu'on obtienne un gain, alors

on s'arrête, et le lendemain on recommence. Puisque l'on est chaque jour en gain, cette tactique est profitable. »

Pour apprécier la fausseté de ce raisonnement, il suffit de remarquer que l'interruption faite chaque jour dans le jeu, et plus ou moins longue suivant la chance, ne change nullement les conditions du jeu. Si l'on doit faire en tout 500 parties, on a les mêmes chances de gain en les faisant avec des interruptions, qu'en les faisant consécutivement.

Le calcul des probabilités prédit la ruine certaine mais à très longue échéance de celui qui joue constamment à un jeu équitable. Pour indiquer au lecteur comment une telle prédiction est possible, supposons qu'on joue à pile ou face, en jouant chaque fois une pièce de dix centimes qui sert d'enjeu. Les joueurs A et B parient constamment le premier pour face, le second pour pile. B est infiniment riche, A ne possède qu'un franc. A sera ruiné quand le nombre des piles aura surpassé de 10 celui des faces. La probabilité pour que ce fait se produise avant un nombre déterminé de coups, par exemple pour qu'il se produise avant le centième coup, est un certain nombre qui pourrait être calculé. Or cette probabilité est d'autant plus grande que le nombre de coups est plus considérable, et elle tend vers la cer-

titude. On peut donc affirmer que A finira par se ruiner.

Le calcul des probabilités a d'autres applications que la théorie des jeux de hasard. Les assurances de toute espèce, sur la vie ou sur les choses, la théorie des erreurs d'observation, d'une si grande utilité dans les sciences physiques, sont de son domaine, mais nous devons borner là ce que nous en dirons, ce qui précède étant moins destiné à donner une idée de l'ensemble de cette science, qu'à montrer par deux ou trois exemples, quels genres de raisonnements l'on y rencontre.

CHAPITRE II

DES MÉTHODES DANS LES SCIENCES ET EN PARTICULIER EN GEOMÉTRIE. — COUP D'ŒIL GÉNÉRAL SUR LA GÉOMÉTRIE.

Les anciens distinguaient deux méthodes pour parvenir à la vérité, l'analyse et la synthèse. L'analyse va de la conclusion à l'hypothèse, et la synthèse au contraire, de l'hypothèse à la conclusion. Il convient d'éclaircir cela par un exemple. Supposons que l'on veuille chercher une démonstration de cette proposition. « Le côté de hexagone régulier inscrit dans un cercle, est égal au rayon. » En joignant le centre aux extrémités d'un côté de l'hexagone, on aura un triangle ; tout revient à démontrer que ce triangle est équilatéral ; pour démontrer ce dernier point, il suffit de faire voir que tous les angles du triangle sont égaux. Or l'angle au centre vaut la sixième partie de quatre angles droits ou deux tiers d'angle droit ; l'angle en l'un des sommets interceptant sur la circonférence 2 divisions dont chacune est $\frac{1}{6}$ de la circonférence, vaut $\frac{2}{6}$ de deux angles

droits ou $\frac{2}{3}$ de droit. On a ainsi trouvé la démonstration, en remontant de proposition en proposition, depuis celle qu'on veut démontrer jusqu'à une que l'on sait être vraie. C'est là l'analyse. La synthèse consiste à parcourir les propositions dans l'ordre inverse, en partant des hypothèses et aboutissant à la conclusion. C'est la manière ordinaire d'exposer les démonstrations.

L'analyse est simplement la *recherche* d'une démonstration, *en commençant par la fin*, ce qui est généralement plus commode. Quand la demonstration a été trouvée, on la rétablit dans l'ordre naturel, c'est la synthèse.

Mais les mots analyse, synthèse, s'emploient dans d'autres sens. En voici un sensiblement différent du sens indiqué ci-dessus. Prenons ce problème « construire un cercle tangent à trois cercles donnés ». En supposant qu'il existe un tel cercle, on trouve une construction donnant les trois points de contact, la recherche de cette construction constitue l'analyse ; mais elle a besoin d'un complément. Il faut, par la synthèse, démontrer que le cercle ainsi construit est bien tangent aux trois cercles.

Enfin, ces expressions ont un autre sens, bien différent des précédents, dans les mots: démonstration

analytique, démonstration synthétique. A tout point on peut, comme il a été dit précédemment, faire correspondre à un système de trois nombres, ses coordonnées. A toute propriété d'un ensemble de points correspond une propriété de l'ensemble de leurs coordonnées. Ainsi toute propriété des figures est réductible à une propriété des nombres. Lorsqu'au lieu de démontrer une propriété des figures, on démontre la propriété correspondante sur les nombres, c'est là ce qu'on nomme une démonstration analytique. Par opposition, une démonstration directe est dite synthétique. Jetons maintenant un coup d'œil sur la science géométrique.

L'objet de la géométrie est, nous le savons, l'étude des figures, c'est-à-dire des ensembles de points. Ces ensembles peuvent être de natures très diverses ; aussi la science géométrique est-elle fort étendue et très riche par le nombre et la variété des propositions qui la composent.

L'étude des droites, des plans et des sphères avec quelques notions sur les sections coniques, compose la géométrie élémentaire, et cela représente déjà un ensemble fort étendu de propositions. La géométrie analytique, en permettant de définir un ensemble de points, ligne ou surface, par une équation, élargit énormément ce domaine. La théorie des sections

coniques devient ici celle des courbes du second degré. Dans l'espace à trois dimensions, on a de même les surfaces du second degré, surfaces qu'un plan quelconque coupe suivant une section conique.

La théories des courbes algébriques, qui se rattache étroitement à l'analyse, peut être considérée ensuite. L'introduction des points imaginaires est indispensable pour donner aux propositions toute leur généralité. Lorsque l'équation d'une courbe, par exemple, est vérifiée quand on remplace les coordonnées d'un point par des quantités imaginaires, $a + bi$, $c + di$ (en remplaçant dans les calculs i^2 par $- 1$), on dit que la courbe passe par le point imaginaire ayant ces quantités pour coordonnées. Ce n'est là qu'une manière de parler, car aucun point réel ne possède de coordonnées imaginaires, mais l'expression a un sens puisqu'elle correspond à un calcul que l'on peut faire et qui permet, dans chaque cas particulier, d'en vérifier l'exactitude ou la fausseté.

Les courbes algébriques se classent d'après leur *ordre*, qui est le degré de leur équation. Une courbe de *degré* ou *d'ordre m* est coupée par une droite quelconque en m points réels ou imaginaires. La *classe* de la courbe est le nombre de tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut lui mener par un point.

Mais il y a un nombre bien plus important pour l'étude des courbes algébriques que l'ordre et la classe, ce nombre est celui qu'on nomme le genre.

Il est impossible ici, d'en donner une définition. Disons seulement que si deux courbes se correspondent point par point, de telle manière que, sauf pour certains points particuliers, à un point de l'une des courbes correspond un point unique de l'autre, ces deux courbes ont forcément même genre. Ainsi, il n'est pas possible de trouver une transformation faisant correspondre à un point d'une courbe un point unique d'une seconde courbe, *et vice versa*, qui transforme une courbe en une autre de genre différent.

Dans le domaine de la géométrie à trois dimensions on rencontre la théorie des surfaces où se présentent des questions extrêmement variées, exigeant à chaque instant, pour être résolues, l'emploi de l'analyse. Les surfaces possèdent en chaque point un plan tangent, contenant les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface par ce point. Si l'on coupe la surface par un plan très voisin du plan tangent, on obtient une courbe que l'on peut toujours considérer comme une conique infiniment petite. *Charles Dupin* qui imagina cette petite conique, lui donna le nom d'*indicatrice* et elle lui servit pour étudier la *courbure* de la surface.

On peut étudier sur la surface différentes séries de lignes remarquables. Les lignes de *courbure* qui, en chaque point de la surface, sont tangentes aux axes de symétrie de l'indicatrice. Les lignes *asymptotiques*, tangentes aux lignes suivant lesquelles le plan tangent en chaque point coupe la surface dans le voisinage de ce point. Les surfaces ayant en chaque point leurs lignes *asymptotiques* rectangulaires se nomment surfaces *minima*. Si l'on considère une courbe fermée non plane, la surface de plus petite étendue qu'on puisse faire passer par la courbe, est une surface *minima*. Le célèbre physicien *Plateau* a indiqué le moyen de réaliser physiquement de pareilles surfaces. Il plonge un petit contour en fil de fer formant une courbe fermée non plane dans un liquide susceptible de former des lames minces, comme l'eau de savon, ou mieux, un mélange d'eau de savon et de glycérine. Le liquide adhère au contour et forme une membrane mince limitée au contour et la forme affectée par cette surface est celle d'une surface *minima*.

Le problème de déterminer une surface de cette espèce passant par un contour donné est des plus difficiles. Il ne peut être résolu que dans des cas très particuliers.

Une espèce de ligne que l'on peut tracer sur une

surface est constituée par les lignes géodésiques. Ce sont les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer sur la surface entre deux de leurs points suffisamment rapprochés. La distance de deux points comptée sur une ligne géodésique est la distance géodésique.

Le problème de faire correspondre à une surface donnée une autre surface, de manière que la distance géodésique de deux points de la première soit égale à celle des deux points correspondants sur la seconde est le problème des *surfaces applicables* sur la surface donnée. C'est encore là un problème des plus difficiles. Toutefois, on peut résoudre le problème dans le cas où la surface donnée est un plan. Les surfaces applicables sur le plan sont les surfaces *développables*, formées de toutes les tangentes à une courbe.

En géométrie, nous l'avons déjà dit, on considère autre chose que des ensembles de points. On considère également des ensembles de lignes ou des ensembles de surfaces. Nous avons déjà dit, à propos des dimensions de l'espace, qu'une ligne droite dépend de quatre quantités, ou, suivant l'expression adoptée, que l'ensemble des droites est une variété à 4 dimensions.

Il en est de même de l'ensemble des sphères, car

pour déterminer une sphère il faut se donner les trois coordonnées du centre et le rayon. M. Sophus Lie a indiqué un moyen de faire correspondre à chaque droite une sphère et à chaque sphère une droite, de sorte que deux sphères tangentes correspondent à deux droites qui se coupent. Cette transformation est très intéressante, mais pour en donner une idée, il faudrait entrer dans de longs développements. Je me borne donc à la signaler.

Les ensembles de *vecteurs* doivent aussi être signalés ici. Ils ont dans les applications à la mécanique et à la physique mathématique, une très grande importance, et nous aurons l'occasion d'en reparler. Disons-en seulement quelques mots ici.

Un *vecteur* est un segment de droite AB, dont l'origine A se distingue de l'extrémité B. Le sens du vecteur est le sens AB.

L'ensemble de tous les vecteurs possibles est une variété à *six* dimensions, puisque donner un vecteur c'est donner les trois coordonnées de son origine, et les 3 coordonnées de son extrémité.

Deux vecteurs égaux, parallèles et de même sens sont dits équipollents.

La somme géométrique, ou résultante de deux vecteurs OA, OB, est la diagonale du parallélogramme ayant OA et OB pour côtés.

La vitesse d'un point qui décrit une courbe, par exemple, se représente par un vecteur, ce vecteur a son origine au point qui décrit la courbe, sa direction est celle de la tangente à la courbe, dans le sens du mouvement, et sa grandeur est celle de la vitesse.

Si, un point A décrivant une courbe, on mène par un point fixe O une droite OB égale, parallèle à la vitesse du point A et de même sens, on obtient un point B qui reste immobile dans le cas où la courbe décrite par le point A se réduit à une droite parcourue d'un mouvement uniforme. Dans ce cas, en effet, la vitesse est constante en grandeur et direction. Dans le cas contraire, le point B se déplacera et décrira une seconde courbe souvent appelée l'indicatrice de la première; et la vitesse de ce second point B, est appelée *l'accélération* du premier.

J'indique ici cette notion, pour faciliter au lecteur l'intelligence de ce que je dirai à propos de la mécanique.

Si à chaque point de l'espace on fait correspondre un vecteur ayant son origine en ce point, on a ce qu'on nomme un *champ de vecteurs*. Les diverses théories de la mécanique et de la physique présentent de nombreuses applications de cette notion.

CHAPITRE III

DE LA MÉCANIQUE

La mécanique se divise en plusieurs parties. On peut en distinguer quatre. « La cinématique, la statique, la géométrie des masses et la dynamique. »

Nous avons déjà parlé de la cinématique, science dans laquelle on ne tient aucun compte des forces produisant le mouvement. Cette science a des applications extrêmement nombreuses à l'industrie. L'étude des mécanismes, des transformations de mouvements soit par engrenages, soit par tiges articulées, soit de toute autre manière, fait partie de la cinématique. Bien des appareils ingénieux de physique, comme le sidérostat de Foucault, sont en réalité fondés sur quelque proposition de cinématique.

Pour donner un exemple de proposition relative à cette science, je prendrai la suivante : Tout déplacement infiniment petit d'un corps solide est un mouvement hélicoïdal. La démonstration suivante, empruntée au traité de cinématique de M. Kœnigs est extrêmement simple. Considérons deux positions A et B occupées par un solide à deux instants très

rapprochés. Soit M un point de A, M_1 la position que vient occuper M quand A vient en B, Le point qui était en M_1, quand le corps occupait la position A vient en M_2 quand le corps est en B. Le point qui était en M_2 quand le corps était en A vient en M_3 quand le corps est en B, et ainsi de suite. On a ainsi une suite de points M M_1 M_2 M_3 etc., tels que chacun vient remplacer le suivant quand le corps passe de la position A à la position B. Ces points, très rapprochés les uns des autres, forment une courbe qui glisse ainsi sur elle-même lorsque le corps passe de la première position à la seconde. Or les seules courbes pouvant ainsi glisser sur ellesm-êmes sans se déformer sont la *droite* le *cercle* et l'*hélice.* Si la courbe considérée est une droite ou un cercle le mouvement est une *translation* ou une *rotation*, sinon c'est un mouvement *hélicoïdal.*

Je citerai aussi mais sans la démontrer, cette proposition de M. Kœnigs. Toutes les courbes et surfaces algébriques peuvent être décrites à l'aide d'un système articulé.

La statique emploie la notion de force ; mais l'emploi de cette notion en statique est beaucoup plus simple qu'en dynamique et ne donne pas lieu aux mêmes difficultés, surtout si l'on se limite à la statique des corps solides invariables.

Pour bien exposer la statique, il convient de la considérer comme une science purement rationnelle. On sait que dans une science purement rationnelle on admet un certain nombre de *symboles non définis*. Ces symboles sont de deux sortes, les uns représentant des objets, les autres des relations entre ces objets. C'est ainsi que pour l'arithmétique on admet : 1° Qu'on sait ce que c'est qu'un nombre; 2° Qu'on sait ce que signifie ajouter l'unité à un nombre. Pour exposer la statique d'une façon rationnelle, on admettra donc ceci: 1° On sait ce que c'est qu'une force, une force a une *direction*, une *intensité*, un *point d'application* ; elle est dès lors représentée par une *vecteur*; 2° Sous certaines conditions on regardera deux systèmes de forces comme *équivalents*, et cette équivalence satisfait à certains principes, tels que celui-ci. « Si deux systèmes de forces A et B sont équivalents, le système A—B, est équivalent à zéro (—B désignant le système B dont toutes les forces ont été changées de sens). » Si deux systèmes de forces sont équivalents, ils restent encore équivalents quand on y adjoint des systèmes équivalents, etc.

Moyennant un certain nombre de principes analogues à ceux-ci, on fait de la statique une science purement rationnelle et qui est, en quelque sorte, le complément naturel de la géométrie.

Je ferai sur l'enseignement de la statique, les mêmes réflexions déjà faites à propos des principes de la géométrie. Un débutant ne comprendra jamais que l'on pose des principes sur des objets non définis. Pour lui, il faut faire de la statique une science expérimentale. Une force, c'est ce qu'on mesure avec un dynamomètre.

Le géométrie des masses est une partie de la mécanique dans laquelle on considère des ensembles de points dont chacun possède un coefficient appelé masse. La théorie des *centres de gravité*, des *moments d'inertie*, etc., se rattache à cette espèce de géométrie qui ne donne lieu à aucune difficulté particulière.

Passons à la dynamique. Les principes de cette science donnent lieu à des difficultés presque inextricables. Ces difficultés sont étudiées avec beaucoup de soin dans la mécanique physique de M. Andrade et dans l'ouvrage de M. Poincaré. « la science et l'hypothèse. »

Je distinguerai trois façons d'exposer la dynamique. Le système fondé sur la notion de *Force*, le système fondé sur la notion de *Masse*, et le système fondé sur le *principe d'Hamilton*.

Voici les principes du 1er système :

1° Une force est quelque chose qu'on ne définit pas, mais qui a un point d'application, une grandeur

ou intensité, une direction, et par suite se représente par un vecteur. Le point d'application d'une force doit être un point matériel. On dit que la force est *appliquée* au point. Ainsi les mots *Force, appliquer une force à un point* sont les *symboles non définis* spéciaux à la dynamique;

2o Si aucune force n'est appliquée à un point, le mouvement de ce point est rectiligne et uniforme (Principe de l'inertie);

3o Si un point soumis ou non à des forces possède un certain mouvement M et vient à être soumis à une force F, on obtient le nouveau mouvement du point en composant le mouvement M avec le mouvement que produirait la force F sur le point partant du repos. (Voici ce qu'on entend par composer deux mouvements. Si le 1er mouvement amène un point de *o* en A, et le second de *o* en B, le mouvement résultant est celui qui amènerait le point de *o* à l'extrémité D de la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés *o* A et *o* B);

4o Si un système de points n'est soumis à aucune force que les actions de ces points les uns sur les autres, la force qui provient de l'action du point A sur le point B est égale et directement opposée à celle qui provient de l'action du point B sur le point A.

Il faut avant tout remarquer que ces principes ne se contredisent pas mutuellement et permettent bien de constituer une science rationnelle. Mais prenons le principe n° 2. Un mouvement suppose un système de comparaison.

Prenons un système de 3 axes rectangulaires, et supposons que pour un observateur lié à ces 3 axes et n'ayant pas conscience de son mouvement, le mouvement du point soit rectiligne et uniforme. Il n'en sera plus de même pour un observateur lié à d'autres axes mobiles par rapport aux premiers. Il faut donc, pour que le principe 2 soit vrai, admettre un système d'axes qu'on considère comme absolument fixe. Or cela répugne. Nous ne pouvons connaître que des mouvements relatifs. Le repos absolu n'a aucun sens. Malgré cette difficulté, je ne considère pas cette manière d'exposer les principes de la mécanique comme mauvaise. Les principes, nous l'avons dit, ne renferment pas en eux-mêmes de contradiction. Ils permettent d'écrire pour chaque problème posé, les équations du mouvement, et c'est ce qu'on doit leur demander.

La difficulté du mouvement relatif existe, du reste dans les autres systèmes. Il y en a une autre. Pour que la science formée avec les principes précédents puisse être autre chose qu'un simple jeu, il faut

qu'elle soit conforme à la réalité. Or, dans la réalité, on ne peut pas considérer une force comme quelque chose s'attelant à volonté à un point ou à un autre, comme une locomotive à un train. C'est là certainement une difficulté sérieuse, mais on peut se dispenser de s'y arrêter, en remarquant ceci. Si en admettant que certaines forces agissent sur un système de points, on a, en respectant les principes de la mécanique, écrit les équations du mouvement, et si ce mouvement est conforme à la réalité, on pourra dire que les forces agissant réellement sur le système forment bien un système équivalent à celles qu'on a supposées. Or c'est toujours ce qui a lieu dans la pratique. Le mouvement d'un point pesant par exemple est bien conforme à la théorie.

La seconde manière d'établir les principes de la mécanique, est d'admettre la notion de *masse*. A chaque point matériel correspond un nombre appelé sa masse, et la masse d'un système est la somme des masses de tous ses points. Si un point se meut, on dit qu'il est soumis à une force égale à sa masse multipliée par son accélération, et dirigée comme cette accélération.

J'ai défini, à propos des vecteurs, ce qu'on entend par *accélération*.

Alors pour avoir les équations du mouvement

d'un système, on appliquera une méthode dite principe de *d'Alembert*, et ramenant la dynamique à la statique. Si en chaque point du système on fait agir une force fictive égale à la masse du point multipliée par son accélération, et de *sens contraire* à cette accélération, ce système de forces fait équilibre aux forces données.

Ce système suppose comme symbole non défini la notion de masse ; mais la masse peut se mesurer expérimentalement, soit à l'aide de la loi de l'attraction universelle, s'il s'agit des corps célestes, soit à l'aide du poids s'il s'agit de corps situés près de nous.

Dans le système fondé sur l'intégrale d'Hamilton, on définit deux quantités, l'*énergie cinétique* d'un système de points et son *énergie potentielle*. Ces deux quantités varient avec le temps. Si on décompose un intervalle de temps quelconque en petits intervalles égaux, la moyenne de la différence entre ces deux énergies pendant tous ces petits intervalles est la plus petite possible pour le mouvement réel du système.

Ce système est logiquement très simple, mais son exposition mathématique repose sur le calcul des variations. On ne pourrait exposer ainsi la mécanique aux débutants.

Je ne discuterai pas la difficulté du mouvement relatif, traitée complètement par M. Poincaré.

Le problème du chat qui retombe sur ses pattes a préoccupé les savants, il y a quelques années. Voici en quoi il consiste. Un chat lancé dans l'air retombe toujours sur ses pattes; comment cela peut-il se faire; il semble que le chat lancé dans l'air et n'ayant aucun point d'appui, ne puisse aucunement modifier son mouvement.

En réalité, les principes de la mécanique s'opposent seulement à ce que le chat modifie le mouvement de son centre de gravité. Quels que soient les mouvemenfs du chat, le centre de gravité décrira toujours le même parabole, mais l'animal, en étendant plus ou moins les pattes, en courbant plus ou moins le corps, peut modifier sa vitesse de rotation. Il n'y a donc dans le phénomène observé, aucune infraction aux lois de la dynamique.

Les questions de mécanique dans lesquelles intervient le frottement présentant de grandes difficultés, il en est de même de celle où intervient la résistance des fluides, par exemple la résistance de l'air.

Dans cette dernière catégorie rentre la question du *vol des oiseaux*. Ce phénomène si vulgaire est encore mal expliqué. Parmi les différentes façons dont peut voler un oiseau, la plus curieuse peut-être

est le vol *plané* dans lequel l'oiseau progresse sans remuer les ailes d'une façon sensible. L'explication de ce phénomène doit être analogue à celle du cerf-volant. Le vent exerce sur le cerf-volant une pression perpendiculaire à sa surface, et cette pression se décompose en deux forces dont l'une, verticale, fait équilibre au poids de l'appareil. L'oiseau est analogue au cerf-volant : comme il progresse très vite, il se trouve dans les mêmes conditions que si, restant immobile, il recevait en sens contraire, la pression d'un vent de même vitesse que lui.

Mais quelle est cette pression du vent : dans la théorie des moulins à vent, on admet qu'elle est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse du vent. Or une telle loi est nécessairement fausse. On démontre que si cette loi était vraie, les oiseaux ne pourraient pas voler ; il leur faudrait des ailes colossales et une force hors de proportion avec leur grosseur. On a fait des expériences qui ont donné une loi plus plausible, mais ces expériences demanderaient à être reprises avec plus de soin.

La théorie de l'élasticité, de la résistance des matériaux, la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides sont autant de parties intéressantes de la mécanique. (*Voir le chapitre sur les applications de la science.*)

CHAPITRE IV

LES SCIENCES PHYSIQUES

Tandis que les sciences mathématiques, partant de principes regardés comme évidents et toujours en très petit nombre, en déduisent par les règles de la logique, d'autres propositions, les sciences physiques, au contraire, renferment un très grand nombre de principes n'ayant pour la plupart rien d'évident, et que l'expérience seule peut démontrer.

Il y a des lois physiques, c'est-à-dire des principes généraux auxquels sont soumis tous les phénomènes de la nature. Ce qui est vrai aujourd'hui, ne saurait être faux demain ; la loi qui règle par exemple la façon dont le volume d'un gaz diminue par la compression, sera encore vraie demain, comme elle l'était hier, et si quelque physicien trouve par l'expérience, des résultats contredisant ceux que d'autres ont obtenus avant lui, jamais il n'accusera la loi naturelle d'avoir changé ; il conclura seulement que ses expériences ou celles de son prédécesseur sont inexactes.

Cette croyance en la permanence des lois naturelles pourrait bien venir de l'expérience. L'expérience, dira t-on, n'indique que le passé ; elle ne garantit pas l'avenir. Si l'on a vu tous les jours le même fait se produire, ce n'est pas une raison pour qu'il se produise encore. Si la rouge est sortie 15 fois de suite à la roulette, peut-on affirmer qu'elle sortira une seizième fois.

Je n'admets pas ce raisonnement, ou plutôt je dois distinguer le cas où il est valable, du cas où il ne l'est pas.

Supposons que j'aie mis moi-même dans un sac les 25 lettres de l'alphabet, et que je tire 6 fois de suite une lettre au hasard, en remettant chaque fois la lettre tirée. Il se trouve que je tire un mot français. C'est là un hasard extraordinaire, mais qui somme toute peut se présenter. Si je recommence un second tirage, je sais fort bien que vraisemblablement je ne tirerai pas un second mot français. Je sais très bien que j'opère au hasard. Supposons maintenant que ce ne soit plus moi qui opère ; une autre personne a mis dans le sac les lettres et fait les tirages. Elle en fait un très grand nombre, et elle a tiré 1.000 mots français formant ensemble un sens et constituant par exemple le commencement d'un récit. Il serait absolument invraisemblable que

le hasard ait amené ce résultat : je croirai donc qu'il y a quelque artifice caché et que les mots qui vont être tirés dans la suite, complèteront le récit commencé.

Ce n'est qu'une probabilité, dira-t-on. Le hasard a pu amener ce résultat.

Je répondrai à cela que cette probabilité est extrêmement faible. La certitude que le hasard n'a pas amené ce résultat est aussi grande que peut l'être une certitude humaine. Car il n'y a pas de certitude absolue. Les règles de la logique sans doute, si elles sont bien observées, ne peuvent nous tromper. Mais suis-je jamais assuré qu'elles sont bien observées. Dans un calcul, la probabilité de faire une faute, si exercé qu'on soit, n'est pas nulle : elle est bien plus grande que celle d'obtenir, en tirant des lettres au hasard, une fable de Lafontaine.

Le fait donc qu'un phénomène étant observé 200 fois de suite, a pu paraître obéir à une certaine loi, peut bien me permettre d'affirmer qu'il n'y a pas là un hasard, et que, observé une fois de plus, il sera encore conforme à la même loi.

Le principe dit de Causalité, regardé généralement comme fondamental, s'énonce d'habitude ainsi : « Les mêmes causes produisent toujours les mêmes effets. » « Dans les mêmes circonstances les

mêmes phénomènes se produisent toujours. » Mais il est impossible de jamais reproduire exactement le même concours de circonstances. Il faudrait donc dire, pour que le principe ait une véritable valeur pratique : quand les causes sont à peu près les mêmes, les effets sont à peu près les mêmes. Sous cette forme, le principe de causalité n'est que le principe de continuité. La cause variant d'une manière continue, il en est de même de l'effet. L'effet est une fonction continue de la cause. C'est l'axiome bien connu : *Natura non facit saltus.*

Je ne discuterai pas plus longuement les principes des sciences physiques, dont j'ai déjà parlé dans le chapitre 1er et aussi dans le chapitre sur la matière.

Les sciences physiques ont reçu dans ce siècle, une extension considérable par la théorie de la lumière, la thermodynamique et la théorie de l'électricité. Actuellement, la théorie de la lumière est venue se fondre dans celle de l'électricité, comme je l'ai expliqué ailleurs, à propos de l'*éther*. Il reste encore bien des lacunes à combler, mais l'explication complète des phénomènes électriques sera, on peut l'espérer, rendue bientôt aussi complète qu'on peut le désirer. Il faut se défier, en ces matières, des fausses explications. L'éther qui remplit tout, et qui n'est peut-être qu'un être fictif (le système de vecteurs

considéré comme l'ensemble des déplacements de ses points, étant seul réel), l'éther n'a sans doute pas toutes les propriétés des solides élastiques. On croit avoir trouvé une explication d'un phénomène, lorsque les lois de ce phénomène ressemblent aux lois ordinaires de l'élasticité. On croit au contraire n'avoir rien fait de bon, si les lois trouvées sont différentes. Je ne vois pas pourquoi la dynamique de l'éther serait la même que celle des corps pondérables. Quand on aura trouvé cette dynamique, quelles qu'en soient les lois, on aura résolu le problème de la nature de l'électricité.

On a émis, relativement aux sciences physiques, une opinion analogue au nominalisme dans les sciences rationnelles. Sous prétexte que nous ne pouvons connaître les choses exactement, on a prétendu que nous ne les connaissions pas du tout, que nos prétendues connaissances se réduisaient à des conventions de langage. Si l'expérience nous démontre qu'une certaine longueur est constante, une expérience plus précise nous montrerait sans doute la fausseté de cette assertion. Si nos moyens ne nous permettaient pas de mesurer un temps, avec une erreur moindre que la moitié de sa valeur, nous affirmerions par exemple que la durée du jour est

constamment égale à celle de la nuit, faute de savoir les mesurer avec précision. Nos mesures étant toujours entachées d'erreur, quelle preuve avons-nous de ne pas nous tromper d'une façon analogue.

Cette opinion me semble un sophisme très grossier. Si je ne savais pas mesurer le temps avec précision, je saurais du moins que dans mes mesures je ne puis compter que sur une évaluation grossière. Je dirais : nos méthodes de mesure ne nous permettent pas de trouver une différence entre la durée du jour et celle de la nuit. Je ne commettrais pas d'erreur en émettant cette affirmation.

D'ailleurs, si, mettant à profit ses connaissances scientifiques, un inventeur construit un appareil, en se conformant aux principes de la physique, l'appareil fonctionnera bien si son auteur a bien raisonné en se conformant à des principes vrais, et il marchera comme les principes l'indiquent. Si au contraire les principes sont faux, l'appareil ne marchera pas. Ceci aurait-il lieu si les principes n'étaient qu'une convention de langage, si une science n'était qu'une langue bien faite ?

CHAPITRE V

APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques sont intéressantes à un triple point de vue. Au point de vue purement logique, en fournissant à l'esprit un exercice de raisonnement ; au point de vue de la connaissance du monde, en donnant une explication complète d'un grand nombre de phénomènes physiques ; au point de vue des applications, en fournissant à l'homme le moyen de tirer, pour l'utilité pratique, le plus grand profit possible des phénomènes naturels.

Il ne faut pas négliger ce dernier point de vue. C'est pour leur utilité pratique que les mathématiques sont étudiées par le plus grand nombre ; mais sur ceux-là même qui ne les étudient que pour leur valeur pratique, elles exercent leur influence éducatrice. Le grand développement qu'ont pris au XIXe siècle les applications des sciences, l'extension surtout de l'électricité pratique, ont une répercussion sur l'intelligence de ceux qui s'en occupent, et tendent à élever le niveau intellectuel du pays.

Du reste, le fait qu'une science a un intérêt pra-

tique ne présente rien d'avilissant pour cette science, et parfois une application peut donner naissance à une théorie très intéressante. Quoi de plus pratique que l'étude de la stabilité des bateaux, cette étude a donné naissance à une théorie, véritable merveille d'élégance. Elle est en même temps fort simple et élémentaire. Le lecteur la trouvera dans le 3e volume de la mécanique de M. Appell.

Je vais énumérer ici les applications les plus saillantes des sciences mathématiques. J'adopterai l'ordre suivant : arithmétique et calcul des probabilités, analyse, géométrie, mécanique.

Les applications de l'arithmétique aux questions financières, opérations de bourse, intérêts composés, amortissement, sont bien connues. On sait qu'une somme placée à intérêts composés s'accroît très vite. Un sou placé au temps de Jésus-Christ à intérêts composés, à 5 0/0, aurait produit, si l'opération eut été possible, une somme fantastique : la valeur d'autant de globes d'or, gros comme la terre, qu'il y a de minutes depuis cette époque. Ceci démontre qu'une pareille opération ne pourrait se faire ; si on l'eut tentée, elle eut sans doute amené un tel abaissement du taux de l'intérêt, qu'il fut devenu nul au bout de très peu de temps.

Une autre application financière des mathéma-

tiques, mais dans laquelle intervient le calcul des probabilités, est celle des assurances. Je parlerai seulement des assurances sur la vie.

Le calcul des assurances sur la vie est fondé sur les principes suivants :

En premier lieu, il faut définir la *valeur actuelle* d'une somme a payable seulement au bout d'un certain temps. Cette *valeur actuelle* n'est autre que la somme qui deviendrait a si elle était placée à intérêts composés pendant le temps considéré, à un taux déterminé.

Or l'espérance mathématique, définie à propos du calcul des probabilités, est une somme d'argent. On peut donc parler de la valeur actuelle d'une espérance mathématique, quand la somme espérée doit être payée à une époque déterminée.

L'assuré s'engage à verser chaque année une certaine prime a, moyennant quoi la compagnie promet à son décès, une somme A à ses héritiers.

Les sommes a et A sont calculées par cette condition : « La valeur actuelle de l'espérance mathématique de la Compagnie est égale à la valeur actuelle de l'espérance mathématique des héritiers de l'assuré. »

Il semble que, d'après ce mode de calcul, la Compagnie ne doive pas faire de bénéfices. Elle en fera

cependant pour deux raisons : 1° parce que certaines personnes résilient leur contrat avant son expiration ; 2° parce que les tables sont construites avec des gens pris en bonne santé *à un âge déterminé*, 20 ans par exemple. Les assurés au contraire doivent être bien portants *au moment du contrat*. En outre, la Compagnie peut placer son argent à un taux plus élevé que celui dont on tient compte dans le calcul.

Une table de mortalité est un tableau donnant sur un certain nombre de naissances, 1.000 par exemple, le nombre des survivants à chaque âge.

On a cherché à remplacer ces tables par une formule, en admettant le principe suivant : « La probabilité pour que deux individus d'âges connus vivent l'un et l'autre après un nombre donné d'années, est proportionnelle à la probabilité pour qu'un 3e individu, d'âge convenablement choisi, vive après ce nombre d'années. » (*J. Bertrand, calcul des probabilités, page 316.*) Chose curieuse, la formule satisfaisant à cette condition fournit des résultats moins différents de ceux donnés par les diverses tables que ceux-ci ne diffèrent entre eux.

La formule répondant à cette condition est la formule de *Gompertz*.

L'assurance sur la vie peut être assimilée à un jeu

de hasard. Si l'assuré vit plus que sa vie probable, calculée par les tables au moment où il s'est assuré, la Compagnie gagne, s'il vit moins, elle perd.

Je ne dirai rien des applications pratiques de *l'analyse*. Cette branche étendue des mathématiques a en effet des applications à la *géométrie* et à la *mécanique*. Ces dernières sciences ayant des applications pratiques, c'est indirectement et par l'intermédiaire de ces sciences que l'analyse en possède.

Les applications de la géométrie sont fort nombreuses. Je ne m'arrêterai pas à la mesure des surfaces et des volumes, applications bien connues, d'usage tout à fait courant. La mesure des surfaces serait, parait-il, l'origine même de la géométrie. Chez les anciens Egyptiens, dit-on, le sol appartenait à l'État, qui donnait à chacun, chaque année, une part à cultiver. Tous les ans, le Nil débordant recouvrait tout de limon, et confondait les différentes parts. Il fallait donc retrouver pour chacun, sinon la même part, du moins une part équivalente, ce qui donna naissance à la géométrie.

Mais les Egyptiens ne savaient pas mesurer les volumes. Si leur administration avait été semblable à celle des pays d'Europe, les Pharaons n'auraient pu construire les pyramides. Il eut fallu en effet faire d'abord le devis de ce qu'elles pourraient coû-

ter, quitte à le dépasser au besoin. Ce devis, ils n'auraient pu le faire, ignorant la mesure des volumes.

La charpente et la coupe des pierres sont des applications fort anciennes de la géométrie ; les méthodes employées dans ces applications, ont été en quelque sorte liées entre elles par la géométrie descriptive, due à *Monge*, à la fin du XVIIIe siècle. Pour donner un point dans l'espace, on se donne ses deux projections sur deux plans rectangulaires, qu'on nomme plan horizontal et plan vertical. Par là les constructions dans l'espace qui ne sauraient être réellement effectuées, car on ne dessine pratiquement que sur un plan, sont remplacées par des constructions planes. Les constructions utilisées dans la coupe des pierres sont souvent compliquées. Citons d'abord les *ponts biais*. La voûte de ces ponts vue de l'intérieur (l'intrados) a la forme d'un demi-cylindre circulaire, mais ce cylindre est limité par deux plans obliques (plans de tête). Les pierres qui composent la voûte (voussoirs) doivent être taillées de façon que les lignes séparant les différentes rangées de voussoirs viennent couper à angle droit les plans de têtes. Si cette condition était rigoureusement réalisée, on aurait ce qu'on nomme l'*appareil orthogonal*, très difficile à tracer. Dans la pratique,

on prend pour les lignes dont nous venons de parler, des hélices, et l'on a l'*appareil hélicoïdal*, qui résout le problème avec une approximation très suffisante.

On emploie beaucoup de surfaces plus compliquées que les cylindres. Tel est le *biais passé*, surface engendrée par une droite rencontrant deux cercles égaux dont les plans sont parallèles, et rencontrant aussi une droite perpendiculaire à leur plan, et équidistante de leurs centres. Il y a beaucoup d'autres surfaces analogues, comme les *arrières-voussures*, surfaces engendrées aussi par une droite rencontrant deux courbes planes et une droite perpendiculaire à leurs plans.

En outre, les voûtes, même simples, donnent parfois, par leurs intersection, des courbes compliquées qui contribuent souvent, dans les édifices, à l'effet architectural.

La perspective est une autre application de la géométrie aux beaux-arts. Un objet quelconque étant donné dans l'espace, en coupant par un plan, appelé tableau, les lignes joignant à l'œil les différents points de l'objet, on obtient l'image de cet objet. On possède des moyens très simples de construire cette image. La perspective est une science peu compliquée, peu étendue, mais néanmoins intéressante. On peut se proposer de faire directement sur le dessin

certaines constructions, par exemple de trouver l'image d'une perpendiculaire à une droite, etc. Ces constructions directes sont souvent fort ingénieuses. Lorsqu'un objet a été correctement dessiné, le dessin ressemble à l'objet à condition que l'œil occupe une certaine place. Si l'œil se déplace, l'objet paraît plus profond, moins profond au contraire si l'œil est trop près. C'est pourquoi les photographies prises avec un appareil trop court, et surtout avec un objectif appelé grand angulaire déforment les objets d'une façon ridicule. L'œil en effet doit occuper, par rapport à la photographie, la position occupée dans l'appareil par la lentille vis-à-vis de la plaque. Or dans les appareils dont je parle, la lentille, ou plutôt le centre optique de l'objectif, est beaucoup trop près de la plaque.

La construction des cartes géographiques est une application de la géométrie, d'un caractère moins élémentaire. Si une surface n'est pas développable, on ne peut pas la représenter sur un plan de manière que les dimensions relatives soient conservées. Mais on peut toujours, c'est un résultat que l'analyse démontre, faire en sorte que les angles soient conservés. On obtient par exemple une représentation d'une sphère sur un plan, en prenant la figure inverse de la sphère, le pôle d'inversion étant situé sur

elle. Alors toute figure tracée sur la sphère se transforme en une figure plane, et les angles des lignes tracées sur la sphère sont les mêmes que ceux des lignes correspondantes sur le plan.

Il y a une infinité d'autres tranformations changeant la sphère en plan, en conservant les angles, telle est la projection de Mercator, usitée pour les cartes marines.

Pour les cartes à grande échelle, où l'on ne représente qu'une petite portion de la surface terrestre, on emploie des transformations altérant peu les angles et conservant les surfaces. Telle est la transformation suivante. On prend sur la sphère à représenter, un point P, vers le centre du pays dont on veut faire la carte. Soit M un autre point de la sphère. Dans le plan tangent en P à la sphère on mène une tangente au grand cercle passant par P et M, et l'on prend sur cette tangente, une longueur P*m* égale à PM. Au point M on fait ainsi correspondre le point *m*. Cette transformation conserve les superficies et altère peu les angles, si le pays à représenter n'est pas trop étendu.

La géodésie est la mesure de la terre. Elle sert à trouver les véritables dimensions de notre globe et à déterminer à sa surface la position de ses différents points. Elle est donc nécessaire à la confection

des cartes géographiques. Entrer dans le détail des opérations qu'elle comporte, nous entraînerait beaucoup trop loin ; disons seulement que ces opérations comportent une précision à peine croyable.

Le calcul du *point*, à la mer, est une application de la trigonométrie sphérique. *Faire le point* c'est déterminer, par des observations astronomiques, la longitude et la latitude du navire, et reporter sa position sur la carte. L'astronomie sphérique est indispensable à la navigation au long cours. De là cette boutade d'un astronome bien connu, disant que sans l'astronomie on ne prendrait pas de café.

L'optique géométrique, application directe de la géométrie permet l'étude des instruments d'optique susceptibles eux-mêmes d'une foule d'applications.

Les lunettes et les télescopes, qui permettent d'examiner les cieux, les instruments plus modestes qui, soit au théâtre soit à la campagne, suppléent à la faiblesse de notre vision, les objectifs photographiques, les lanternes de projections qui donnent un grand attrait aux conférences publiques, enfin le microscope, condition essentielle du progrès dans les sciences naturelles, tous ces instruments sont autant d'applications de l'optique géométrique, tributaire elle-même de la géométrie.

La science qui fourmille le plus d'applications est

la mécanique. La théorie des mécanismes, branche de la cinématique, fournit des dispositifs ingénieux pour produire la grande variété des mouvements nécessaires à l'industrie. M. Kœnigs a démontré que par le moyen des seuls systèmes articulés, on pouvait décrire toutes les courbes, toutes les surfaces algébriques possibles, on peut de même réaliser toutes les transformations algébriques. Le tracé des engrenages fournit aussi d'intéressantes applications géométriques. Comme application usuelle fort ingénieuse de la cinématique, je citerai la *coulisse de Stephenson,* dont sont munies les locomotives, et qui permet au mécanicien de faire varier la détente et d'obtenir à volonté la marche en avant ou en arrière.

La statique est une autre branche de la mécanique, dont les applications pratiques sont fort importantes. Il faut citer les questions de stabilité des constructions, et de résistance des matériaux. Cette dernière théorie tient surtout à une autre théorie plus générale, celle de l'équilibre des corps élastiques. Mais les équations de l'élasticité sont trop compliquées pour pouvoir être appliquées aux problèmes pratiques. On a donc fait une théorie particulière pour l'élasticité des pièces, droites ou courbes, mais ayant toujours une dimension beaucoup

plus grande que les autres, employées dans les constructions. Cette théorie, bien que simple, peut, dans le cas d'assemblages compliqués exiger de longs calculs. On les remplace par des constructions graphiques, ce qui donne une science d'un grand intérêt pratique, la statique graphique.

Il faut citer encore, comme application de la statique, l'équilibre des corps flottants, dont j'ai déjà parlé.

Les différents systèmes de balance sont encore des applications de cette même science.

La dynamique a pour objet de trouver le mouvement d'un système connaissant les forces agissant sur lui. Par cette seule définition, on voit combien doivent être nombreuses les applications de cette science. On regarde généralement les principes de cette science comme dus à Galilée. C'est lui qui, le premier, étudia les lois de la pesanteur, c'est lui, dit-on, qui, dans la cathédrale de Pise, l'esprit captivé par les oscillations d'une lampe suspendue à la voûte de l'édifice, découvrit les lois du mouvement du pendule. Les oscillations du pendule ont sensiblement la même durée, quelle que soit leur amplitude, lorsque celle-ci demeure très petite. Mais cette durée n'est pas rigoureusement la même ; l'égalité n'est qu'approchée. *Huygens* inventa le pen-

dule cycloïdal dont les oscillations ont rigoureusement la même durée, quelle que soit l'amplitude. Dans le pendule ordinaire, le poids suspendu à l'extrémité du fil décrit un arc de cercle. *Huygens* lui fait décrire un petit arc de cycloïde. C'est la courbe engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite. Pour atteindre son but, Huygens attache le poids à un fil flexible qui pendant l'oscillation, vient s'enrouler sur un arc de cycloïde. Par ce procédé, l'extrémité du fil vient décrire une autre courbe de même nature. En effet, quand on déroule un fil enroulé sur une première courbe, l'extrémité du fil décrit une seconde courbe, et la première courbe est dite développée de la seconde. Or, la développée d'une cycloïde est une autre cycloïde.

Le mouvement d'une bille sur le tapis d'un billard le mouvement d'une toupie, soit que sa pointe reste immobile, soit qu'elle se déplace, constituent des problèmes de dynamique d'un ordre élevé. Au mouvement de la toupie se rattache la curieuse remarque suivante : Si un corps tourne rapidement autour d'un axe, l'application d'une force tendant à déranger cet axe de sa position primitive, ne produit pas le même effet que si le corps ne tournait pas. L'axe résiste et tend à rester dans sa position primitive. Quand l'on fait tourner un corps lourd

autour d'un axe, cet axe garde dans l'espace absolu, la même orientation, si le mode de suspension de l'axe permet qu'il en soit ainsi. L'axe reste pointé dans la même direction malgré la rotation de la terre. On a le *gyroscope*, un des appareils imaginés par Foucault, pour mettre en évidence la rotation de notre globe.

Le mouvement du cerceau, de la bicyclette, sont d'autres applications plus simples de la dynamique.

Il est bon de savoir ce qu'on nomme en dynamique *degrés de liberté d'un système*. C'est le nombre d'inconnues dont il faut connaître la valeur pour que la position du système soit déterminée. Si, par exemple, un point peut se mouvoir en tous sens dans l'espace, la position du point est déterminée lorsqu'on donne trois quantités, ses trois coordonnées. Le système formé d'un point unique isolé est donc à 3 degrés de liberté. Un point qui se meut sur une surface, n'a plus que deux degrés de liberté; s'il est mobile sur une courbe, le nombre des degrés de liberté se réduit à l'unité. Les systèmes matériels peuvent avoir plus de trois degrés de liberté, lorsqu'ils ne se composent pas d'un point unique.

La plupart des machines usitées dans l'industrie n'ont qu'un degré de liberté, c'est ce qu'on nomme des *systèmes à liaisons complètes*. Chaque point de la

machine ne peut se mouvoir que sur une ligne déterminée, et le mouvement d'un point détermine celui de tous les autres.

Je ne puis entrer ici dans le détail de toutes les machines dont l'étude constitue la dynamique industrielle.

Une source considérable d'applications de la science mathématique est l'électricité, dont le développement dans le domaine de la pratique est de plus en plus étendu.

On sait qu'il faut distinguer, dans le domaine de l'électricité, trois parties distinctes. L'électricité statique, le magnétisme, et l'électricité dynamique.

Un corps est électrisé quand il possède la propriété d'attirer les corps légers, comme ces porte-plumes d'ébonite, ou caoutchouc durci, qui étant frottés attirent de petits morceaux de papier. L'électrisation produit donc des forces puisqu'elle permet de mettre en mouvement de petits objets. Lorsqu'un corps conducteur, comme une masse de cuivre, est électrisé, il y a en chaque point une certaine quantité d'électricité : cela veut dire simplement que ce point est le siège d'une force plus ou moins intense. Cette électricité est tout entière à la surface, que le corps soit creux ou plein.

L'étude de la distribution de l'électricité sur les

corps conducteurs est un problème d'une très grande difficulté, dont on a, dans les cas simples, des solutions géométriques d'une grande élégance, mais qui, dans les cas difficiles, est à peine résolu par les efforts de l'analyse la plus élevée.

Le magnétisme est l'étude des aimants. L'aimantation des corps est l'un des phénomènes naturels les plus mystérieux. Tout le monde connaît ces aimants en fer à cheval, à l'aide desquels on peut attirer de petits objets de fer ou d'acier, tout le monde connaît la boussole dont une extrémité de l'aiguille se dirige toujours vers le Nord. Les applications de cette science en dehors de la boussole, dont l'utilité est connue, sont liées comme nous allons voir aux applications de l'électricité dynamique. Nous n'en parlerons pas ici plus longuement.

La plupart des traités d'électricité envisagent l'électricité dynamique comme si son identité de nature avec l'électricité statique était évidente. Mais la plupart des phénomènes qui sont très apparents dans cette dernière science, jouent au contraire dans l'autre un rôle très effacé. C'est ainsi que les différences de potentiel entre les divers points d'un courant, si on les mesure statiquement, sont des quantités insignifiantes.

Il conviendrait donc d'exposer les choses autre-

ment. Si dans un vase contenant de l'eau légèrement acidulée, on plonge une lame de zinc et une lame de cuivre, et qu'à l'extérieur du vase on réunisse ces deux lames par un fil métallique, ce fil possède de singulières propriétés. Voici les deux plus saillantes : 1° si l'on approche ce fil d'une aiguille aimantée, l'aiguille est déviée, et tend à se mettre en croix avec le fil, une certaine force agit donc sur l'aiguille : 2° si l'on interrompt le fil, en intercalant dans le circuit un autre vase contenant de l'eau acidulée, cette eau est décomposée en ses deux éléments, l'oxygène et l'hydrogène. On dira alors qu'un courant passe dans le fil et va du zinc au cuivre. C'est une simple *définition*. L'intensité du courant se mesure par la force qui, dans des conditions déterminées, s'exerce sur une aiguille aimantée donnée. C'est aussi la quantité d'eau décomposée par le courant dans un temps déterminé. L'expérience prouve que ces deux façons de mesurer l'intensité sont concordantes.

L'intensité une fois définie, l'expérience nous apprendra comment elle varie quand on allonge le circuit, ou quand il est bifurqué. De ces lois de variations on déduit la notion de résistance d'une portion du circuit, celle de différence de potentiel entre deux points du circuit.

Les courants électriques dont l'industrie fait

usage sont produits par le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique. Ces courants sont alternatifs, si le sens du courant change périodiquement, continus quand il ne change pas. Les courants alternatifs sont plus faciles à produire, mais ils ne sont commodes à employer que pour l'éclairage. Pour faire marcher des moteurs, si l'on veut employer les courants alternatifs, il faut faire usage de la disposition dite des courants polyphasés.

Je ne veux pas insister davantage sur les nombreuses applications de la science. Ce progrès des applications ira-t-il en se continuant, de façon à transformer encore les conditions de la vie. Je ne le crois pas. Autrefois les applications de la science étaient peu nombreuses, et c'est pour ainsi dire subitement que ces applications sont nées. Autrefois on n'utilisait que la force des animaux, celle du vent et des chutes d'eau. Le progrès a consisté surtout dans l'utilisation des forces naturelles. Il reste encore beaucoup à faire, et l'on arrivera sans doute dans peu de temps à utiliser toutes les forces naturelles encore improductives, les vents, les marées, le mouvement des vagues, la chaleur solaire, en emmagasinant l'énergie produite de façon à ne l'utiliser que quand on voudra et où l'on voudra. C'est là le vrai progrès à réaliser. Ceux qui voient dans l'avenir l'air

sillonné de ballons dirigeables, qui s'imaginent ces nouveaux engins remplaçant les chemins de fer se trompent. Un célèbre mécanicien, *Reulaux*, inventeur d'appareils ingénieux, a indiqué en quoi consistait le progrès dans les applications de la mécanique. Ce progrès consiste selon lui dans un guidage de plus en plus parfait du mouvement. Les chemins de fer, où le mouvement est guidé par les rails, sont ainsi un progrès sur la locomotion routière, et l'on voit que d'après les idées de *Reulaux*, les ballons dirigeables ne seraient pas un progrès.

Je me hâte de dire que *Reulaux* a justifié cette conception du progrès par des exemples frappants, et que la justesse de son idée ne semble guère contestable.

CHAPITRE VI

ROLE DE LA SCIENCE DANS L'ENSEIGNEMENT

On oppose souvent en France, l'enseignement scientifique à l'enseignement littéraire, ce dernier seul étant l'enseignement désintéressé, et le premier ayant un but exclusivement pratique. Ce sujet, traité par des gens de talent, ayant reçu dans leur jeunesse l'enseignement gréco-latin, donne lieu à de belles périodes, à des phrases bien construites admirées à juste titre des gens de goût. Cette phrase, ne signifie nullement mon mépris pour l'enseignement des langues anciennes. Je suis bien loin de croire que ces études soient inutiles. Tout exercice intellectuel est bon pour le développement de l'intelligence. La langue latine, justement par ce qu'elle est vague, qu'elle manque de précision, demande des efforts pleins d'efficacité. Rendre dans un français correct, élégant même, la pensée d'un auteur, avec autant d'exactitude que possible, en employant les

expressions françaises exactement correspondantes à celles de la langue traduite, est un excellent exercice.

Dans les lignes qui suivent, je ne combats donc pas au fonds l'étude des langues anciennes, je proteste seulement contre ceux qui ne voudraient pas. dans l'enseignement, faire la place aux sciences, la large place à laquelle elles ont droit.

On oppose, ai-je dit, l'enseignement désintéressé à l'enseignement utilitaire, et l'on considère comme exclusivement utilitaires les études scientifiques.

Que signifie donc le mot désintéressé. L'étude des langues mortes est désintéressé, puisqu'on ne les parle plus. Mais celui qui apprend l'anglais, langue tout à fait *vivante*, pour lire les œuvres de Shakespeare, *mort* depuis longtemps, est-il donc moins désintéressé que le latiniste apprenant le latin pour lire Virgile. On peut avoir un but désintéressé en étudiant des choses tout à fait pratiques. On peut étudier les machines à vapeur, par curiosité, pour voir comment elles fonctionnent, sans avoir l'intention de faire un mécanicien. Tous les traités de physique indiquent les appareils employés en télégraphie, et cependant ils ne s'adressent pas exclusivement aux futurs télégraphistes.

L'étude même des choses pratiques peut donc être désintéressée, et la science ne contient pas que des

questions ayant des applications pratiques. Weierstrass, ou Sophus Lie, étudiant par exemple les surfaces minima, n'avaient certainement pas un but utilitaire, cette question très difficile n'ayant pas, que je sache, d'application industrielle.

Le but de l'enseignement scientifique est double.

En premier lieu, il apprend à bien raisonner, donne à l'esprit plus de précision, plus de justesse, enseigne à ne pas se contenter de formules toutes faites, à ne pas prendre le vraisemblable pour le vrai, à distinguer ce qui est certain de ce qui est très probable, à ne pas confondre une démonstration faite selon les règles de la logique avec un bel effet d'éloquence.

La résolution de questions pour lesquelles il n'existe pas de règle certaine, comme sont de nombreux problèmes de géométrie élémentaire, donne à l'esprit la *sagacité*, aptitude à percevoir au milieu d'un grand nombre de principes généraux, quel est celui dont l'emploi doit nous conduire à la solution demandée.

En second lieu, la science nous fait connaître l'univers, non pas sans doute dans son ensemble, nous n'en sommes pas encore là, mais dans ses différentes parties. Les nombreux phénomènes que l'observation nous fait connaître, ceux, plus nombreux en-

core, que notre expérience peut produire, ne sont pas isolés les uns des autres. Ils sont reliés par des liens secrets. Ces liens, ce sont les lois mathématiques qui les régissent. La science, en nous faisant connaître ces lois, nous fait pénétrer dans la connaissance des choses aussi loin que cela nous est possible.

Etudions donc les sciences, étudions-les pour le bon exercice de logique qu'elles nous fournissent, étudions-les parce qu'elles soulèvent un coin du rideau qui nous cache la nature des choses, étudions-les, même pour leurs applications pratiques. Etudions-les pour savoir comment fonctionne le tramway électrique qui, dans les villes, abrège notre chemin, pour connaître le mécanisme de la puissante locomotive qui nous fait franchir en si peu de temps des distances considérables, pour avoir l'explication du téléphone, du télégraphe, de toutes ces applications merveilleuses, si bien passées dans nos mœurs que nous les trouvons toutes naturelles.

AVERTISSEMENT SUR LA NOTE QUI SUIT

La note sur la géométrie projective, par laquelle je terminerai ce travail, a pour but de montrer l'indépendance de cette espèce de géométrie à l'égard de la notion de distance. On établit en effet dans cette note, les principes de la géométrie, avec les seules notions de point, de droite et de plan. Il n'est jamais question de déplacer une figure. L'étude de la géométrie ordinaire ou métrique est, si l'on veut, l'étude d'un groupe de transformations ; le groupe des transformations n'altérant pas la distance de deux points. A deux points A et B la transformation fait correspondre deux autres points A', B', tels que leur distance soit la même que celle des points primitifs. La géométrie projective sera, dans le même ordre d'idée, l'étude du groupe plus général des transformations changeant les droites en droites.

S'il n'y avait pas de corps solides, la géométrie métrique serait, comme nous l'avons dit, impossible. La géométrie projective le serait encore si l'on avait la notion de ligne droite, que les rayons lumineux suffiraient sans doute à nous fournir.

Plusieurs auteurs, Grassmam, Von Staudt se sont

occupés de cette géométrie. Je n'ai eu connaissance de leurs travaux que par des comptes rendus très brefs, et principalement par l'aperçu qui s'en trouve dans l'ouvrage de M. Russell, sur la géométrie. Ce petit travail m'est donc personnel, et je prie le lecteur de m'excuser s'il est moins bien fait que d'autres du même genre, dont je n'ai pas connaissance.

NOTE I

SUR LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE (1)

Les propositions de la Géométrie dite projective sont indépendantes du postulatum d'Euclide ; elles sont même indépendantes de toute notion de distance.

Le groupe projectif est le groupe des transformations qui changent une droite en une autre droite. Une propriété projective est une propriété qui reste vraie quand on fait subir à la figure qu'elle concerne une transformation changeant les points en points, les droites en droites et par suite les plans en plans.

Parmi les transformations projectives, il en est qui transforment trois points en ligne droite en trois autres points donnés en ligne droite ; au contraire, pour que quatre points donnés en ligne droite se transforment en quatre autres points en ligne droite donnés, il faut, comme on le démontre en géométrie ordinaire, par des considérations où intervient le postulatum d'Euclide, que les quatre premiers aient même rapport anharmonique que les quatre autres.

(1) On admet dans ce qui suit l'axiome suivant : Deux droites se coupent toujours quand elles sont dans un même plan. Si cet axiome n'était pas vrai, on pourrait cependant l'admettre par l'adjonction de points fictifs ou idéaux.

C'est cette notion de rapport anharmonique de quatre points, qu'il nous faut établir sans recourir à la notion de distance et au postulatum d'Euclide.

En joignant tous les points d'une figure plane F à un point fixe S, et prenant l'intersection de chacune des droites ainsi obtenues avec un autre plan P, on obtiendra dans cet autre plan, une seconde figure qui sera dite la *projection*, l'*image* ou la *perspective* de la première. Ainsi, la droite joignant un point à son image passe par le point S. L'image d'une droite D est une autre droite D′, intersection du plan mené par S et par D avec le plan de projection P (fig. 11). Ces deux droites, images l'une de l'autre, se rencontrent sur la droite d'intersection du plan de la figure F avec le plan P, puisqu'elles sont les intersections de ces deux plans par un troisième le plan SD, de sorte qu'elles passent toutes deux par le point A commun aux trois plans.

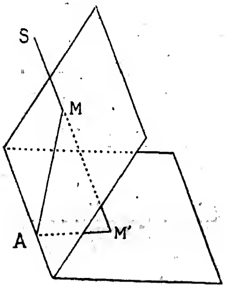

Fig. 11

Considérons maintenant deux figures F et F′ perspectives l'une de l'autre, le sommet étant le point S, comme ci-dessus. Je projette d'un autre sommet O

ces deux figures sur un troisième plan K. J'aurai ainsi dans le plan K deux autres figures f et f', le sommet S aura son image en s, et l'intersection des plans des figures F et F' se projettera suivant une droite δ.

Alors les figures f et f' se correspondront point par point et droite par droite. La droite joignant deux points correspondants passera par s, et deux droites correspondantes se couperont sur δ. Ces propriétés en effet, ont lieu pour les figures dans l'espace F et F', elles ont donc aussi pour leurs images f et f'.

Les figures f et f' sont dites *homologiques*. Le point s est le *centre d'homologie*, la droite δ est l'axe d'homologie.

Quand le centre s est donné, ainsi que l'axe δ, et un couple a, a' de deux points correspondants, on peut construire l'homologue d'un point m quelconque. Cet homologue se trouve d'abord sur la droite sm ; en outre, la droite am coupe δ en un certain point p, et l'homologue de la droite amp est la droite $a'p$, qui doit contenir le point cherché. Ce point se trouve donc à l'intersection de sm et de $a'p$ (fig. 13).

Je définirai tout à l'heure une espèce particulière d'homologie, dite *homologie harmonique*, possédant la propriété d'être réciproque. Une transformation est

dite réciproque, lorsque le point transformé de M étant le point M′, le transformé du point M′ est précisément le point M. Mais auparavant, je dois indiquer une importante proposition de géométrie projective, fondamentale pour tout ce qui suit, et que l'on peut nommer théorème du *quadrilatère de Staudt.*

Soient A, B, C, trois points en ligne droite (fig. 13). Par B et C, menons les deux droites BG et CG, et par A une droite coupant BG au point E, CG au point F. Joignons enfin BF et CE qui se coupent en H, et joignons GH qui coupe ABC en D. Le point D se nommera conjugué de A par rapport à B et C. Or, le théorème à démontrer consiste en ceci. Quand les points ABC restant fixes, on change les droites BG, CG, AEF, la position du point D ne change pas.

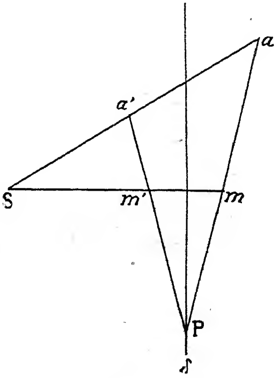

Fig. 12

En effet, considérons un autre quadrilatère, ABC *efgh*, en faisant correspondre aux majuscules du premier quadrilatère, les minuscules de même nom dans le second.

On a ainsi deux quadrilatères pouvant être consi-

dérés ou comme homologiques quand ils sont dans le même plan, ou comme perspectives, ou images l'un de l'autre, si leurs plans sont différents.

Supposons, en effet, les deux quadrilatères situés dans deux plans différents, il est facile de voir qu'en

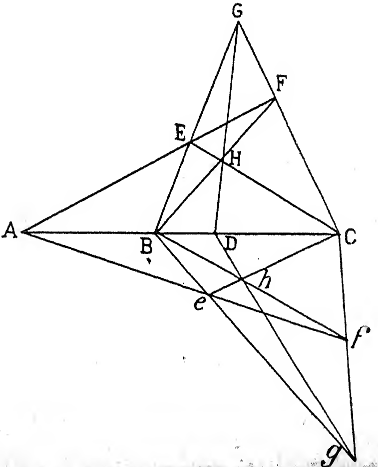

Fig. 13

prenant pour sommet de projection le point de rencontre des trois plans (EAe) (GBg) (GCg), l'un d'eux sera l'image de l'autre. Si les quadrilatères sont dans le même plan, on pourra les considérer comme les images de deux quadrilatères situés dans des

plans différents, et on sera ramené au cas précédent.

Mais alors les lignes GH et *gh* étant homologues, couperont la droite BC au même point D. Ceci démontre la proposition énoncée.

Il faut remarquer la réciprocité qu'il y a entre les points A et D. Nous avons appelé D le conjugué de A. A est aussi le conjugué de D. En effet, considérons le quadrilatère EGFH. Deux côtés se rencontrent en B ; les deux autres en C ; les diagonales EF et GH passent l'une par A, l'autre par D. On peut donc dire : D est dit conjugué de A par rapport aux deux points B et C de la droite AD, si deux côtés d'un quadrilatère se coupant en B et les deux autres en C, les diagonales de ce quadrilatère passent l'une en A, l'autre en D. On voit, par cette définition, que l'ordre des points A et D est indifférent.

Il est facile maintenant de définir l'homologie harmonique. Prenons A comme centre d'homologie, la droite GH comme axe d'homologie, et supposons que B et C se correspondent. On voit alors facilement que si l'on cherche par la règle indiquée ci-dessus l'homologue de E, on trouve F, car BE et CF se coupent sur l'axe, et par suite sont homologues, et l'homologue de F est E, car BF et CE se coupant sur l'axe d'homologie sont aussi deux droits homo-

logues. C'est là l'*homologie harmonique*, dont nous avions parlé.

Donnons maintenant des numéros aux différents points de la droite BC. Au point A, nous mettrons l'infini, au point B zéro, au point C l'unité, au point D, nous mettrons $\frac{1}{2}$, et nous dirons que D est le point moyen entre B et C ; le point moyen entre deux autres sera le conjugué harmonique de A par rapport à ces deux autres.

Au point moyen entre B et D nous mettrons $\frac{1}{4}$ au point moyen entre D et C nous mettrons $\frac{3}{4}$, en général, au point moyen entre ceux ayant les numéros a et b nous mettrons $\frac{a+b}{2}$.

Il sera facile aussi de trouver le point K tel que C soit moyen entre B et K. Ce point portera le numéro 2 et ainsi de suite.

Mais portons notre attention sur les points dont les numéros sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, en prenant les points moyens entre 0 et $\frac{1}{4}$, entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$, entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, entre $\frac{3}{4}$ et 1, on aura les points $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$; on pourra

continuer ainsi. Avant d'aller plus loin on peut remarquer que les points $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ sont homologues dans l'homologie harmonique dont nous avons parlé car les quadrilatères au moyen desquels on les construit sont homologues l'un de l'autre. Il en sera de

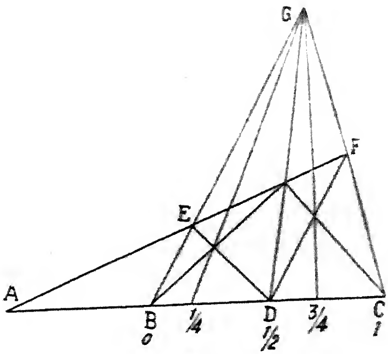

Fig. 11

même des points $\frac{1}{8}$ et $\frac{7}{8}$, et en général de deux points dont la somme des numéros est 1.

Cette remarque est fort importante. En général, les points dont les numéros sont a et b sont homologues dans une homologie harmonique dont le

centre est A et dont l'axe d'homologie est la droite joignant le point G au point moyen entre les deux points a, b. Alors si on prend d'autres points de numéros c et d, tels que $a + x = c$ et $b - x = d$, ces deux points, on le verra facilement, seront homologiques dans l'homologie considérée, car les quadrilatères de Staudt qui servent à construire l'un, sont homologiques de ceux qui servent à construire l'autre. Il en résulte que si $a + b = c + d$, le point moyen entre les points dont les numéros sont a et b, est identique au point moyen entre ceux dont les numéros sont c et d. Il était nécessaire de démontrer cela, sans quoi on n'aurait pas eu le droit de donner au point moyen entre a et b, le numéro moyen arithmétique, puisque des points dont les numéros auraient eu même moyenne arithmétique n'auraient pas eu même point moyen.

Le mode de numérotage ne donne que les points dont les numéros sont des fractions ayant pour dénominateur une puissance de 2. Mais en poussant la subdivision suffisamment loin, on pourra approcher autant qu'on voudra d'un point quelconque. Alors en se reportant à ce que nous avons dit du continu, on verra que tout point a un numéro.

Il est facile de voir, de plus, que les points voisins du point A ont pour numéros de très grands nom-

bres. Ceci s'accorde avec ce fait que l'infini est le numéro du point A.

Quand on aura numéroté une droite, on pourra en numéroter une autre située dans le même plan, en la considérant comme perspective de la première d'un point de vue quelconque. On aura le même numérotage que par le procédé direct, car les constructions donnant les points successifs ont pour images des constructions toutes pareilles dans la figure projetée.

Ceci permet de démontrer un point intéressant laissé de côté dans ce qui précède. Si A et D sont conjugués par rapport à B et C, B et C sont conjugués par rapport à A et D (fig. 13).

D'après la remarque faite ci-dessus, des points conjugués ont pour perspective des conjugués. Or, sur la droite AG, d'après la construction même, A et G ont pour conjugués les points R et T où CE et BF coupent AG. (Ils n'ont pas été marqués sur la figure.) En projetant du sommet ~~F~~ sur AB les points /H ARGT se projettent en ABCD, et puisque R et T sont conjugués par rapport à A et G, on en conclut que C et B sont conjugués par rapport à A et D.

Voyons maintenant comment est modifié le numérotage lorsque les points B et C sont remplacés par d'autres.

Supposons d'abord qu'on échange B et C, c'est-à-dire que, au lieu des numéros 0 et 1, on mette 1 et 0. Les points dont les numéros sont x et $1 - x$ seront simplement changés l'un dans l'autre, le nouveau numéro sera lié au numéro primitif par la formule $y = 1 - x$.

Supposons qu'on mette à la place de B et C deux autres points quelconques. Le point A aura toujours pour numéro l'infini. Quant aux points B et C ils ont maintenant des numéros b et c, le point D a pour numéro la moyenne arithmétique entre b et c, et l'on verra d'une façon générale, que le point dont le numéro était x a maintenant pour numéro $b \times (1 - x) + cx$..

Appelons éloignement de deux points la différence de leurs numéros, on verra alors que si l'on considère l'éloignement de deux points quelconques divisé par l'éloignement de deux autres en ligne droite avec les premiers, ce quotient ne dépendra pas des valeurs choisies pour b et c, il reste par conséquent le même, quels que soient les points B et C pris pour base du numérotage, pourvu qu'on ne change pas le point A.

Numérotage d'une droite quelconque. — Nous considérons un plan P, que nous ne changerons jamais

pour un autre, et que nous nommerons le plan *absolu*. Considérons une droite quelconque, qui coupe ce plan en A. Prenons sur cette droite deux points B et C quelconques, et servons-nous de ces trois points pour établir sur cette droite un numérotage, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus. Le rapport de deux segments, MN et RT situés sur cette droite sera, par définition, le rapport des éloignements, définis ci-dessus, et indépendant, comme on l'a déjà dit, des numéros de B et de C.

Si nous projetons la droite sur une autre, en prenant le sommet de projection dans le plan absolu, ABC se projetteront en *abc* que l'on numérotera comme ABC, et alors un point quelconque de la droite aura même numéro que sa projection. Le rapport de deux segments sera donc égal à celui de leurs projections.

On pourrait appeler droites pseudo-parallèles deux droites qui se coupent dans le plan absolu.

Or, à l'aide de ce principe : le rapport de deux segments est égal à celui de leurs projections, on peut établir toute la géométrie projective.

Voici une manière de procéder. On établit d'abord le théorème des transversales. Une méthode due à Poncelet, et trop peu connue, consiste à projeter les segments sur une droite parallèlement à la

transversale. La relation à démontrer entre les segments est remplacée par une relation entre leurs projections, et cette relation est une identité. Pour adapter cette méthode à notre théorie, il suffit de remplacer les projetantes parallèles à la transversale par des pseudo-parallèles.

Maintenant, le théorème du rapport anharmonique, fondement de la géométrie projective, se déduit du théorème des transversales. (Voir la géométrie élémentaire de MM. Nievenglowski et Gérard, tome I, page 242, Ex. 2.)

On peut aussi faire une géométrie analytique. Prenons trois axes OX, OY, OZ, et projetons un point quelconque sur OX, en menant un plan par ce point et par la droite suivant laquelle le plan YOZ rencontre le plan absolu. Ce plan coupera OX en un point qui aura un certain numéro, OX ayant été au préalable numéroté. En répétant cette construction pour OY et OZ, on voit que l'on obtiendra trois numéros pour chaque point de l'espace.

On établira comme d'habitude les formules donnant les coordonnées d'un point qui divise un segment dans un rapport donné, en remplaçant les parallèles par des pseudo-parallèles dans toutes les constructions, on démontrera ensuite qu'une équation du 1er degré représente un plan, etc.

NOTE II

ÉCLAIRCISSEMENTS DIVERS

1° *Sur la théorie des groupes et sur le raisonnement en général.*

A propos de la géométrie et des principes de cette science, j'ai été amené à définir ce qu'on entend par transformation et par groupe de transformations. Cette notion de transformation et de groupe acquiert dans les sciences mathématiques, aussi bien en analyse qu'en géométrie, une place de plus en plus grande.

J'ai présenté cette notion comme une opération faisant correspondre à chaque point un point, mais on peut envisager les choses d'une façon bien plus générale. Je vais le faire ici, tout en restant aussi élémentaire que possible.

Nous considérons un ensemble E. Les objets composant cet ensemble sont de nature quelconque. Il suffit pour que l'ensemble E soit défini que : 1° Il y ait un moyen de reconnaître si un objet appartient ou non à l'ensemble ; 2° Il y ait un moyen de reconnaître si deux objets de l'ensemble sont distincts ou non.

Supposons que pour donner un objet de l'ensemble, il faille donner n quantités (comme pour donner un point de l'espace il faut donner ses trois coordonnées). Nous dirons alors que l'ensemble considéré est à n dimensions; les n quantités pourront être appelées les coordonnées de chaque objet.

C'est ainsi que l'ensemble des sphères est à quatre dimensions, car pour définir une sphère, il faut donner les trois coordonnées de son centre et de son rayon. Nous avons du reste expliqué ailleurs, avec quelques détails, cette notion sur le nombre de dimensions d'un ensemble.

Une transformation, ou correspondance, sera alors un moyen de faire correspondre à chaque objet, ou comme nous dirons, à chaque *élément* de l'ensemble, un autre objet ou élément soit du même ensemble soit d'un autre ensemble.

Nous envisageons d'abord les transformations faisant correspondre à chaque élément d'un certain ensemble E, un élément du même ensemble. Il suffira, pour définir une pareille transformation, de donner des formules permettant de calculer les coordonnées de l'élément correspondant à un élément donné, connaissant les coordonnées de celui-ci. La géométrie fournit un grand nombre d'exemples de

transformations. Citons les transformations de contact de M. Lie.

Voici ce que M. Lie nomme élément de contact. C'est l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point. L'ensemble de tous les éléments de contact est à cinq dimensions. Pour le montrer à un lecteur peu familier avec la géométrie analytique, supposons trois axes rectangulaires. Un point sera défini quand on donne trois quantités, ses trois coordonnées. Un plan passant par ce point sera défini quand on donne en plus les deux points où il coupe deux des axes, et par conséquent les distances de ces points au point de concours des axes. Cela fait bien en tout cinq quantités.

On dit qu'un élément de contact *appartient* à une surface, s'il est formé d'un point de la surface et du plan tangent en ce point; qu'il appartient à une ligne, s'il est formé d'un point de la ligne et d'un plan passant par la tangente en ce point. L'élément est dit appartenir à un point A, s'il est formé du point A et d'un plan quelconque passant par A. Les transformations de contact de Lie font correspondre à chaque élément de contact un autre élément, de façon qu'à tous les éléments *appartenant* à une même multiplicité (surface, ligne ou point) correspondent tous les éléments appartenant à une même multiplicité.

Définissons maintenant le produit de deux transformations. Si une transformation T change un point A dans un point B, et une seconde S change le point B dans le point C, la transformation qui change A en C et qui équivaut par conséquent à T et S faites successivement se nommera le produit de T par S, et se désignera par TS.

Il faut observer que le produit de T par S n'est pas égal à celui de S par T : on n'a pas en général TS = ST.

Mais le produit de T par SU, est égal au produit de TS par U, en sorte que T(SU) = (TS)U. On le voit facilement de la façon suivante : si T change l'élément A en B, si S change B en C, tandis que la transformation U change C en D, alors SU change B en D, T (SU) change donc A en B puis B en D, c'est-à-dire change A en D. TS change A en C(TS)U change donc A en C, puis C en D, c'est-à-dire A en D. Donc T(SU) et (TS)U ont bien le même effet, changer A en D.

La transformation inverse de la transformation S qui change A en B, est par définition celle qui change B en A. On la désigne par S^{-1}. Le produit d'une transformation par son inverse change A en B puis B en A, c'est-à-dire change chaque élément A en lui-même. C'est donc la transformation identique, qui

ne change rien. On la désigne par le nombre 1, parce qu'en multipliant quelque chose par un, on ne le change pas.

Un groupe de transformations est un ensemble de transformations tel que le produit de deux quelconques d'entre elles, et l'inverse de chacune d'elles, fasse encore partie de l'ensemble.

Toutes les transformations conservant quelque chose, forment un groupe. Prenons par exemple en géométrie les transformations conservant les lignes droites c'est-à-dire transformant une première droite en une seconde droite. Il est clair que le produit de deux pareilles transformations changeant une première droite en une seconde et celle-ci en une troisième fait aussi partie du groupe.

Venons à la notion, dont nous avons déjà parlé à propos du postulatum, de groupes isomorphes, et de structure d'un groupe.

Soit G un groupe, S une transformation de ce groupe, H une transformation ne faisant pas partie du groupe, et pouvant même changer les éléments de l'ensemble E dans ceux d'un *autre* ensemble.

Supposons que S change A en B, que H change A en a, B en b. La transformation S' qui change a en b, sera nommée la transformée de S par H. C'est la transformation $H^{-1}SH$; en effet H^{-1} change a en A,

S change A en B, H change B en b ; le produit considéré change donc a en b.

A chaque transformation S, correspond ainsi une transformation S', au produit de deux transformations correspondra le produit des deux transformations correspondantes, car si deux transformations changent, la première A en B, la deuxième B en C, le produit change A en C. Si H change A, B, C en a, b, c, les transformations correspondantes changeront la première a en b, la deuxième b en c, et leur produit changera a en c. Ce produit correspondra donc bien au produit primitif.

Dès lors, le groupe G se transformera en un groupe G', on dit que les groupes G et G' sont isomorphes, ou qu'ils ont même texture.

Si on transforme tous les éléments de l'ensemble E par une transformation H, on obtient un second ensemble E'. A deux éléments de E qui sont dans une certaine relation R, correspondront deux éléments de E'. Nous dirons que ces deux éléments sont dans la relation r transformée de R. Cela voudra dire simplement que ces deux éléments sont les transformés de deux autres qui sont dans la relation R.

A toute propriété du premier ensemble, corres-

pondra ainsi une propriété du second, à tout raisonnement concernant le premier ensemble on pourra, par une sorte de traduction, ou de substitution de mots, faire correspondre un raisonnement concernant le second. Nous dirons encore que ces raisonnements ont même forme, ou même texture.

On peut imaginer des transformations bien diverses. Supposons qu'à un point et une époque, on fasse correspondre un point et une autre époque. Je précise ; un point est déterminé par 3 coordonnées, x, y, z, et le temps par une seule quantité t, chaque *époque* correspondant à chaque valeur de t. Soient 4 autres variables X, Y, Z, T, qui sont des fonctions de x, y, z, t. Ces 4 autres nouvelles variables définiront un autre point et une autre époque. A un point en repos correspondra un point en mouvement. Malgré cela deux groupes transformés l'un de l'autre par une telle transformation auront même texture.

L'idée générale que l'on peut dégager de là est celle-ci. On peut interpréter l'univers de bien des façons, mais si deux manières d'interpréter les phénomènes sont différentes, elles auront néanmoins même texture, dans le sens donné plus haut à ce mot. Il y a beaucoup d'arbitraire dans la façon dont nous interprétons les choses, pour les adapter à no-

tre esprit, mais la texture de l'interprétation est unique.

2° *Sur les notions premières*

L'impossibilité de tout définir est une chose parfaitement certaine. Il y a donc des choses dont on ne peut donner la définition. Malgré cette évidence, beaucoup de personnes s'ingénient à définir les idées les plus simples, et comme elles emploient pour cela des mots plus compliqués, les personnes qui les lisent trouvent avec raison que cette philosophie est une chose bien obscure, bien peu intelligible.

Prenons la notion de nombre : un nombre déterminé, par exemple le nombre *sept*. Que signifie cette proposition : il y a *sept* billes dans un sac. L'écolier auquel cette question serait posée ne serait pas embarrassé pour répondre. Il vous montrerait comment on compte les billes. Le philosophe, lui, n'a jamais pu en sortir. Pour moi, je crois que l'écolier a raison. *Comprendre* le sens d'une proposition, de la nature de celles que j'ai nommées *faits relatifs*, c'est savoir faire l'observation ou l'expérience nécessaires pour constater sa vérité ou sa fausseté. L'écolier sait faire l'expérience, donc il *comprend* le sens de la proposition.

Prenons la notion d'addition. L'écolier sait bien ce que c'est qu'ajouter une bille à une collection de billes placées dans un sac. L'opération à faire pour ajouter l'unité à une collection peut d'ailleurs changer selon la nature de la collection. Ajouter un wagon à un train est une opération assez compliquée nécessitant un effort physique assez considérable.

La notion de nombre a ceci de particulier qu'elle s'introduit dans le raisonnement même, en sorte que certaines règles de logique n'auraient pas de sens si l'on ne savait pas compter. Par exemple, je veux démontrer le théorème de Pascal. « Si un hexagone est inscrit dans une section conique, les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite. » Je suppose donc un hexagone, ABCDEF. La phrase que l'on prononce habituellement est celle-ci : Soit un hexagone ABCDEF. Ceci suppose que je sais compter jusqu'à *six*, et constater que A, B, C, D, E, F est une collection de *six* lettres. Les exemples analogues sont extrêmement abondants.

3° *Sur la définition des sciences et leur classification.*

Ne m'étant occupé que des sciences rationnelles, je n'ai rien dit dans le courant du volume sur la classification des sciences. D'ailleurs un tableau synoptique des différentes espèces de science avec des

subdivisions n'offre pas beaucoup d'intérêt. Une classification détaillée est forcément artificielle. Je me bornerai ici à quelques considérations sur la définition d'une science et la distinction entre différentes espèces de science.

Il n'y a pas de ligne de démarcation bien tranchée entre les sciences rationnelles et les sciences expérimentales. Comme nous l'avons expliqué ailleurs, par l'adjonction de principes nouveaux, dont l'expérience vérifie toutes les conséquences, on rend rationnelles les différentes branches des sciences physiques.

Il y a, il me semble, entre les sciences physiques et les sciences naturelles une démarcation beaucoup plus nette. Les unes étudient des phénomènes possibles, les autres des phénomènes réels. L'optique géométrique, par exemple, étudie la marche de la lumière dans les milieux transparents. C'est une espèce de géométrie. On réalise, il est vrai, les miroirs, les prismes, les lentilles, objets de cette science, mais on peut réaliser aussi les objets dont s'occupe la géométrie. Il n'y a pas là une différence essentielle entre les deux espèces de science. Mais, tandis que les sciences mathématiques et physiques étudient des objets qu'on peut réaliser, qu'on réalise artificiellement dans les laboratoires, les sciences

naturelles au contraire étudient les phénomènes qui se produisent d'eux-mêmes, sans être provoqués. La différence apparaît bien nettement, quand l'objet peut se présenter sous un double aspect naturel ou artificiel. L'étude chimique de la *silice*, par exemple, diffère beaucoup de l'étude de ce même corps en minéralogie. La silice préparée artificiellement, la silice gélatineuse par exemple, ne ressemble guère au quartz (cristal de roche, ou améthyste). L'étude de ces beaux cristaux qui se rencontrent dans la nature, a du reste une partie géométrique, que je me borne à signaler, la *cristallographie*.

L'*astronomie* est une science naturelle : elle étudie des phénomènes sur lesquels nous ne pouvons avoir aucune espèce d'influence. Si on la classe habituellement dans les sciences mathématiques, cela tient à sa méthode. La simple observation des astres, la détermination de leurs positions sur la sphère céleste exige déjà l'emploi de la géométrie. Il faut du reste corriger le résultat brut des observations. L'atmosphère d'une part fait éprouver aux rayons lumineux une déviation, d'où la correction de *réfraction*. D'autre part la direction apparente de ces rayons est modifiée par le mouvement de la terre. Le mouvement de la lumière que nous observons est son mouvement relatif par rapport au globe ter-

restre, non son mouvement absolu. De là une autre correction nécessaire, la correction d'*aberration*.

La *mécanique céleste*, branche la plus élevée de l'astronomie, est aussi la plus mathématique. La loi de l'attraction universelle régit à elle seule le mouvement des astres. Certains ouvrages de vulgarisation faits sans doute par des personnes ignorant la mécanique, et dont j'ai eu un jour sous les yeux un spécimen, tendent à donner, de la *loi de l'attraction universelle*, une idée complètement fausse. On y fait intervenir à tort, avec la force d'attraction, une autre force qu'on nomme force centrifuge. Pour faire comprendre en quelques mots à des personnes non au courant de la mécanique, en quoi consiste la loi de l'attraction universelle, on peut procéder comme il suit, en évitant d'employer le mot force. On définit d'abord l'accélération comme nous l'avons fait, à propos de la mécanique. Cette notion étant acquise, la loi de l'attraction universelle consistera en ceci : Si deux points matériels A et B sont en présence, l'accélération de l'un d'eux, A par exemple, est dirigée de A vers B. Sa grandeur s'obtient en divisant la masse de B par le carré de la longueur AB, et multipliant le résultat par un coefficient dont la valeur dépend du choix des unités de longueur, de masse,

et de temps. Dans le système d'unités de Gauss, ce coefficient est égal à *un*.

Parmi les sciences naturelles, il faut mettre à part celles qui concernent les êtres vivants. Ici les mathématiques n'interviennent plus que dans la théorie des instruments d'observation. Du reste, tout ce qui ne se découvre pas par l'observation pure et simple, elle-même parfois fort difficile, est extrêmement obscur. Quelques personnes croient que les lois de la mécanique suffisent à expliquer la vie. Il est certain que non, et voici pourquoi : Les lois de la mécanique nous permettent de trouver les équations du mouvement d'un système, quand les forces sont données ; ce sont des façons de préciser ce que veut dire cette expression : « Telles et telles forces agissent sur un système matériel ». Mais les lois de la mécanique ne font jamais connaître les forces. elles ne démontrent même pas la loi de l'attraction universelle. A plus forte raison ne font-elles pas connaître les forces agissant dans un être vivant. Supposez un savant géomètre, venant d'une planète où l'on ignore la dynamique, et voyant fonctionner une locomotive. S'il se persuade que c'est la façon dont les pièces sont agencées, la disposition même de la machine qui produit le mouvement, il com-

mettra la même erreur que le physiologiste mécanique. Le déterminisme mécanique, opinion plus radicale, mais plus vague que la précédente, c'est que les lois physico-chimiques déterminent tout, même les mouvements volontaires. Cependant, en affirmant que ma volonté produit le mouvement de mon doigt, je n'affirme rien autre chose que ceci : « Si je veux mouvoir mon doigt, il se meut. » C'est là un fait expérimental. Tout autre sens donné à la proposition énoncée est un sens métaphysique incompréhensible.

Quelques autres branches des connaissances humaines, qu'on ne classe pas toujours parmi les sciences, vont faire l'objet d'un rapide examen. Citons d'abord la *géographie*. On ne comprend pas bien pourquoi cette science liée intimement à la *géodésie*, à la *géologie*, à la *théorie des phénomènes* de l'*atmosphère*, toutes branches des mathématiques appliquées, est considérée en France comme une annexe de l'histoire. La théorie même des *cartes géographiques* sort du domaine élémentaire. Au point de vue de l'objet étudié, la géographie se place à côté de l'astronomie. C'est l'étude d'une planète particulière, la seule pour laquelle nos connaissances soient très détaillées.

Il reste à parler des sciences *historiques*, des sciences *sociales* et *économiques*. Je ne dirai rien de l'histoire, c'est en somme la connaissance d'une série de faits. Des réflexions philosophiques suggérées par les faits, on tirera je crois difficilement des lois générales assez précises pour servir dans un raisonnement. Les sciences économiques méritent notre attention. Voici un exemple de problème économique que l'on peut traiter mathématiquement. Admettons les deux principes suivants : 1° Sur un marché, les prix se fixent de façon à donner au vendeur le bénéfice maximum ; 2° Si le prix de vente augmente, la quantité de marchandise que l'acheteur est disposé à acheter ne peut que diminuer ou rester la même, elle ne peut augmenter.

Si l'on étudie dans cette hypothèse, l'effet produit sur le prix d'une marchandise par un impôt, un calcul simple permettrait de *démontrer* : 1° Que le prix de la marchandise doit augmenter ; 2° Que, malgré cela, le bénéfice du vendeur sera moindre (parce que la quantité achetée diminuera) ; 3° Que l'augmentation du prix de la marchandise peut, dans certains cas, surpasser la taxe dont elle est imposée.

Je n'ai pas encore parlé de la psychologie. C'est l'étude des phénomènes de la pensée, phénomènes

dont nous avons une conscience directe. Il y a deux écoles : la vieille, qui veut qu'on observe directement ces phénomènes, grâce à la conscience que nous en avons ; la nouvelle, qui veut faire de la psychologie une annexe de la physiologie. Je n'ai pas à me prononcer sur cette question en dehors du sujet traité, mais si l'on pouvait, à l'aide d'un microscope observer le cerveau d'un homme vivant, je crois bien que les pensées de la personne ne courraient pas grand risque d'être dévoilées.

ERRATUM

Page 9, ligne 15: *au lieu de*: D. *lire*: D″

Page 80, ligne 10 :-

au lieu de : l'angle AGL

lire : l'angle A. GL.

Page 89, ligne 1 : *au lieu de*: n — 8, *lire*: 4n — 8

Page 149 :

au lieu de : CHAPITRE X

lire : CHAPITRE V.

Page 225, ligne 20: *au lieu de*: F, *lire*: H

TABLE DES MATIÈRES

Châteauroux. — Typ. et Lith. P. Langlois et Cie

7L